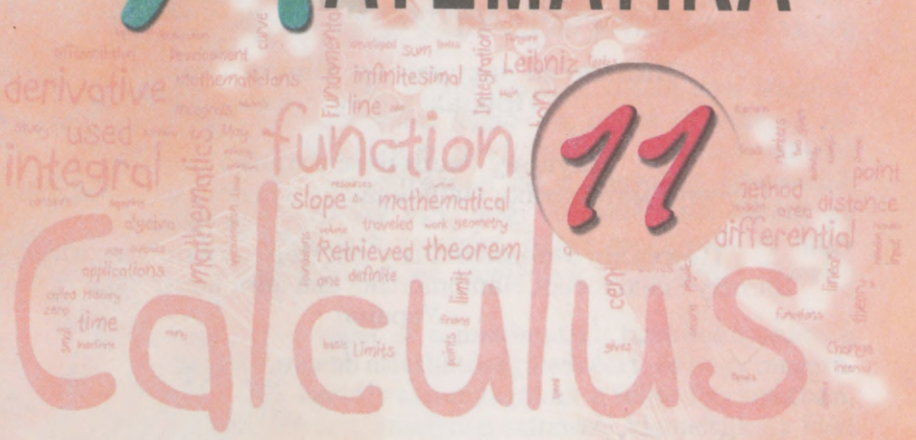
H. P. BEVZ, V. H. BEVZ

MATEMATIKA



11

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek számára

Standard szint

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2011

УДК 51(075)
ББК 22.1я721
Б36

Перекладено за виданням:
Бевз Г. П. Математика : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ МОН України № 235 від 16.03.2011 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Бевз Г. П.

Б36 Математика : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. із навчанням угорською мовою : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз ; переклад угорською мовою Ю. І. Кулін. – Львів : Світ, 2011. – 320 с. : іл. – Бібліогр. : с. 294.

ISBN 978-966-603-696-7.

Цей підручник призначений для завершення вивчення математики в середній школі. Він відповідає рівню стандарту. Підручник містить шість розділів: «Показникові та логарифмічні функції», «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування», «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики», «Координати і вектори у просторі», «Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл».

УДК 51(075)
ББК 22.1я721

© Бевз Г. П., Бевз В. Г., 2011
© Видавництво «Генеза», оригінал-макет, 2011
© Кулін Ю. І., переклад, 2011

ISBN 978-966-603-696-7 (угор.)
ISBN 978-966-11-0063-2 (укр.)

ELŐSZÓ

Tudjuk, mennyire hasznos lehet a matematika a különböző érdeklődésű és szakmájú emberek számára. Ismert matematikusok ezt így fogalmazták meg:

„A matematika tanulmányozása két szempontból is fontos: egyrészt azért, mert a tudománynak ez az ága jelentősen befolyásolja az értelmi képességek fejlődését; másrészt, mert széleskörűen alkalmazható a gyakorlatban" (Mihajlo Osztrohradszkij).

„Matematikai ismeretek nélkül nem érthetjük meg a korszerű műszaki tudományok alapjait, mint ahogy azt sem, miképpen kutatják a tudósok a természeti és a társadalmi jelenségeket" (Andrij Kolmohorov).

„Van egy tudomány, amely nélkül egyetlen másik sem létezhet. Ez a matematika. A matematikai fogalmak, ábrák és jelképek segítségével értekeznek, levelezneknek és gondolkodnak más tudományok művelői. A matematika magyarázatot ad a bonyolult folyamatok törvényszerűségeire, mégpedig úgy, hogy leegyszerűsíti azokat az alapvető természeti jelenségek szintjére. Képes megjósolni és nagy pontossággal előre kiszámítani az események alakulását" (Szerhij Szoboljev).

Ezzel a tankönyvvel véget ér a matematika tanulmányozása a középiskolában. A könnyebb átláthatóság kedvéért, és hogy megértsétek, hol a helye a 11. osztály tananyagának a teljes folyamatban, készítettünk egy táblázatot, amelyben színessel kiemeltük az idén tanulandó részeket.

MATEMATIKA	
Algebra és az analízis elemei	***Mértan***
Függvény, egyenlet és egyenlőtlenség	Pont, egyenes, szakasz, szög, sokszög, körvonal, körlap
Hatványfüggvény	Hossz, terület, a szög és az ív mértéke
Trigonometrikus függvény	Egybevágósági és hasonlósági transzformáció
Trigonometrikus egyenlet és egyenlőtlenség	Síkbeli koordináták és vektorok
Exponenciális és logaritmusos függvények	Egyenesek és síkok a térben
A derivált és alkalmazása	Térbeli koordináták és vektorok
Az integrál és alkalmazása	Soklapok (poliéderek), forgástestek
A valószínűség-számítás és a matematikai statisztika elemei	Mértani testek felszíne és térfoga

A tankönyv a középiskolák tanulói számára készült a standard szintű programnak megfelelően. Ez a program lehetővé teszi a mér-

tan, az algebra és az analízis elemeinek egyesített, illetve bontott tanulmányozását. A teljes anyag elsajátításához heti 3–4 tanórára van szükség. Számotokra legfontosabb az általános matematikai tudásszintetek fejlesztése és az, hogy képessé váljatok a matematikai ismeretek alkalmazására.

Egyes tárgyköröket már ismertek a korábbi évek során tanultakból, a többségük azonban új lesz számotokra. Igyekezzetek megtanulni ezeket a részeket. Az elméleti anyag olvasásakor fordítsatok különös figyelmet a dőlten vagy félkövéren nyomtatott szavakra. *Dőlt betűvel* az új szakkifejezéseket és fogalmak neveit jelöltük. **Félkövér betűvel** a fontos megállapításokat és tételeket emeltük ki.

Sokkal könnyebben megtanulhatjátok az anyagot, ha a matematikai fogalmakat nem egymástól elszigetelten fogjátok kezelni, hanem megkülönböztetitek az egyszerű fogalmakat a származtatottaktól. Tudnotok kell például, hogy a kocka a paralelepipedon egyik fajtája, a paralelepipedon egy hasáb, a hasáb viszont soklap, a soklap pedig mértani test stb. Figyeljétek meg, hogy a logaritmizálás a hatványra emelés fordított folyamata, az integrálás pedig a differenciálás inverze.

Egyik vagy másik téma tanulásánál igyekezzetek rendszerezni az anyagot: készítsetek diagramokat és vázlatrajzokat.

A matematika ismerete abban rejlik, hogyan tudjátok alkalmazni azt. Ennek legjobb módja a feladatok megoldása. A tankönyv minden témához és paragrafushoz különböző nehézségű feladatokat tartalmaz. Ezek a következőképpen oszlanak meg:  *Szóbeli feladatok* (A és B szint) és  *Ismétlő feladatok*. A házi feladatokat színessel emeltük ki. A paragrafus végén található a  *Közös munka* rovat, amelyben a feladatok megoldását is közöljük. Azt tanácsoljuk, hogy a házi feladat elvégzése előtt nézzétek át ezt a rovatot.

Érdekes tudnivalókat tartalmaz a *Matematikatörténeti adalékok* c. rész.

A tanultakat általánosítja és rendszerezi *A fejezet összefoglalása* és az  *Önálló munka* rész.

Akik többet szeretnének megtudni, azok számára a mellékletben gyakorlati feladatokat és irodalomjegyzéket is közlünk.

A matematika olyan, mint egy nagy, tarka virágkertészet, ahol mindenki az ízlésének megfelelő csokrot állíthat össze. Világos, ahhoz, hogy csokrunk legyen, előbb be kell lépnünk ebbe a kertészetbe.

Szeretettel várunk!

A szerzők

Az emberiség ismeretanyagának nem létezik egyetlen olyan területe sem, amely ne használná a függvény fogalmát és grafikus ábrázolását.

K. Lebegyincev

1 Exponenciális és logaritmus-függvény

A FEJEZET TÉMAKÖREI

- A függvényről tanultak ismétlése.
- Hatványfüggvény és exponenciális függvény.
- Exponenciális egyenlet és egyenlőtlenség.
- A logaritmus fogalma és tulajdonságai.
- Logaritmusfüggvény.
- Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek.

1. fejezet

1. §. A függvények és főbb tulajdonságaik

Ismételjük meg, amit az előző osztályokban a függvényekről tanultatok.

Ha egy D halmaz minden x eleméhez hozzárendeljük az y változó egyetlen értékét, akkor az ilyen hozzárendelést *függvénynek* nevezzük.

Ebben az esetben az x ***független változó*** vagy ***argumentum***, y pedig ***függő változó*** vagy ***függvényérték.***

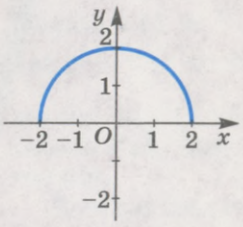
Az x változó, az argumentum összes lehetséges értékét a függvény ***értelmezési tartományának*** nevezzük, és D betűvel jelöljük.

Az y változó összes lehetséges értékét, melyet a függvény felvehet, az adott függvény ***értékkészletének*** nevezzük, és E betűvel jelöljük.

A függvényeket leggyakrabban: a) táblázattal; b) grafikusan; c) analitikusan, képlettel adjuk meg.

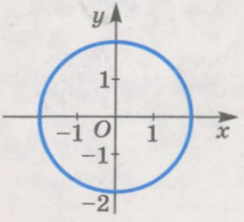
Például a kocka a oldala és V térfogata közötti összefüggés a $V = a^3$ képlettel adható meg, ahol $a > 0$.

Ha egy függvényt képlettel adunk meg és az értelmezési tartományát nem határozzuk meg, akkor a függvény értelmezési tartományának a változó értékeinek azt a legbővebb halmazát tekintjük, melyre a képlet értelmezhető. Például az $y = x^2 + x - 1$ függvény értelmezési tartománya R, az $y = \frac{x}{x-1}$ függvény értelmezési tartománya pedig a $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ halmaz.



1. ábra

Ha egy függvényt grafikusan adunk meg, akkor a függvény értelmezési tartománya a grafikon x tengelyre eső vetülete, értékkészlete pedig az y tengelyre eső vetülete. Például az 1. ábrán az $y = \sqrt{4 - x^2}$ függvény grafikonja látható. A függvény értelmezési tartománya a $[-2; 2]$ halmaz, értékkészlete pedig a $[0; 2]$ intervallum.



2. ábra

Emlékezzetek vissza, hogy a ***függvény grafikonja*** a koordinátasík minden olyan pontja, melyek abszcisszája a függvény argumentuma, ordinátája pedig a hozzá tartozó függvényérték.

Függvénynek tekinthető-e a 2. ábrán látható görbe? Nem, mivel minden x értékhez (például $x = 1$) két különböző y érték tartozik. A definíciója alapján, a függvény olyan

hozzárendelés, ahol minden x argumentum értékhez egyetlen y függvényérték tartozik.

A grafikonról rögtön leolvasható az általa megadott függvény értelmezési tartománya és értékkészlete; megállapítható, hogy az adott függvény páros-e vagy páratlan; meghatározható a grafikon és az y tengely metszéspontja, a függvény zérushelyei ($y = 0$), valamint azon argumentumértékek, melyekre a függvényértékek előjele nem változik meg ($y > 0$ vagy $y < 0$); meghatározható a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumai; van-e a függvénynek legkisebb, illetve legnagyobb értéke.

Az $y = f(x)$ függvény ***páros***, ha értelmezési tartománya szimmetrikus a nullára, és az értelmezési tartománya minden x elemére teljesül az $f(x) = f(-x)$ egyenlőség.

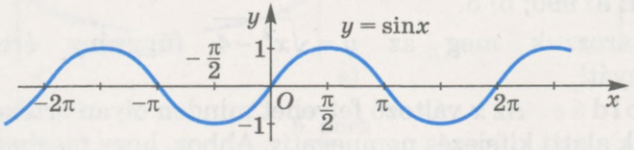
Az $y = f(x)$ függvény ***páratlan***, ha értelmezési tartománya szimmetrikus a nullára, és az értelmezési tartománya minden x elemére teljesül az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség.

Léteznek olyan függvények is, melyek se nem párosak, se nem páratlanok. Ezek azok a függvények, melyeknek vagy az értelmezési tartományuk nem szimmetrikus a nullára, vagy nem teljesül az $f(-x) = \pm f(x)$ egyenlőség közül egyik sem.

A páros függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre (lásd az 1. ábrát), a páratlan függvény grafikonja pedig az origóra (3. ábra).

Az $y = f(x)$ függvény ***periodikus*** a $T \neq 0$ periódussal, ha az értelmezési tartománya minden x elemére teljesül az $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$ egyenlőség.

A periodikus függvények értelmezési tartománya az egész R számegyenes vagy mindkét irányba végtelen sok számintervallum. A T szerint periodikus függvény grafikonját az x tengely menti T egységnyi párhuzamos eltolás önmagába viszi át. Minden trigonometrikus függvény periodikus. A 3. ábrán az $y = \sin x$ függvény grafikonja látható, melynek a legkisebb pozitív periódusa $T = 2\pi$.



3. ábra.

A függvény ***növekvő*** valamely intervallumon, ha bármely nagyobb argumentumhoz ebből az intervallumból nagyobb függvényérték tartozik. A függvény ***csökkenő*** valamely intervallumon, ha bármely nagyobb argumentumhoz ebből az intervallumból kisebb függvényérték tartozik.

Az $y = \sqrt{4 - x^2}$ függvény (lásd az 1. ábrát) növekvő a $[-2; 0]$ intervallumon és csökkenő a $[0; 2]$ intervallumon.

Az $y = \sin x$ függvény (lásd a 3. ábrát) növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ intervallumon és csökkenő a $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ intervallumon.

A függvényt jellemző tulajdonságok közzé soroljuk a függvény legnagyobb, illetve legkisebb értékét. Például az $y = \sqrt{4 - x^2}$ függvény legnagyobb értéke 2 az $x = 0$ helyen, és a -2, valamint a 2 helyeken veszi fel a legkisebb értékét, a nullát (lásd az 1. ábrát). A 3. ábra alapján határozd meg az $y = \sin x$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a függvény? Mi a függvény argumentuma?
2. Mi a függvény értelmezési tartománya?
3. Hogyan adható meg a függvény?
4. Milyen függvényeket ismersz? Mi a grafikonjuk?
5. Mely függvények növekvők? Melyek csökkenők?
6. Definiáld a páros; páratlan függvényt! Hozz fel példákat!
7. Mely függvények periodikusak? Hozz fel példát periodikus függvényre!

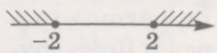
Közös munka

1. Határozzuk meg az $y = x^3 - 5$ függvény:
a) függvényértékét, ha az argumentum értéke 10;
b) az argumentum azon értékét, melynél a függvényérték 120!

● Megoldás. a) Ha $x = 10$, akkor $y = 10^3 - 5 = 1000 - 5 = 995$;
b) ha $y = 120$, akkor $x^3 - 5 = 120$, innen $x^3 = 125$, és $x = 5$.
Felelet: a) 995; b) 5.

2. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x^2 - 4}$ függvény értelmezési tartományát!

● Megoldás. Az x változó felvehet minden olyan értéket, melynél a gyök alatti kifejezés nemnegatív. Ahhoz, hogy meghatározzuk ezeket az értékeket meg kell oldani az $x^2 - 4 \geqslant 0$ egyenlőtlenséget.



4. ábra

Mivel az $x^2 - 4$ másodfokú polinomnak vannak gyökei, a -2 és 2, így az $x^2 - 4 \geqslant 0$ egyenlőtlenség megoldási halmaza a $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ intervallum (4. ábra).

Felelet: $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $y = x\cos x$ függvény páratlan!

● **Megoldás.** Az $y = x\cos x$ függvény értelmezési tartománya R, a valós számok halmaza, ami szimmetrikus az origóra. Határozzuk mag az $y(-x)$ értéket, figyelembe véve, hogy az $y = x$ függvény páratlan, az $y = \cos x$ függvény pedig páros. Így kapjuk

$$y(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x = -y(x).$$

Tehát az $y = x\cos x$ függvény páratlan.

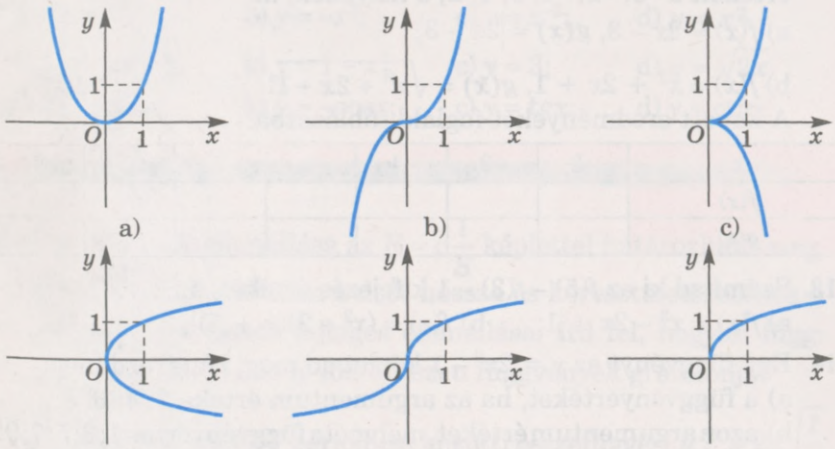
Szóbeli feladatok

1. Az $y = x^2$ képlettel megadott függvényt az első 5 természetes számon értelmezték. Mi a függvény értékkészlete?

2. Határozd meg az $y = x^3$ függvény értelmezési tartományát, ha az értékkészlete $[-1; 27]$!

3. Az 5. ábrán látható görbék közül melyik nem függvénygrafikon?

4. Az 5. ábrán látható grafikonok közül melyik páros függvény grafikonja? Melyik páratlané?



5. ábra

5. Az $y = x^3$, $y = x^2$, $y = x$, $y = 1$, $y = \cos x$, $y = \sin x$ és $y = \sqrt{x}$ függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok?

6. Lehet-e egy függvény egyszerre páros is és páratlan is?

7. Melyek periodikusak az $y = -x^2$, $y = -\cos x$, $y = \sin 2x$, $y = \sqrt{x}$ és $y = \operatorname{tg} x$ függvények közül?

8. Válaszd ki az 5. ábrán látható grafikonok közül az egyiket, és jellemezd a hozzá tartozó függvényt!

9. Az alábbi függvények közül melyik grafikonja illeszkedik az origóra:
a) $y = x^3$; b) $y = 3x - 2$; c) $y = x^{-2}$;
d) $y = \cos x$; e) $y = \sqrt{x}$; f) $y = \operatorname{tg} x$?

A

10. Határozd meg az $f(-10)$, $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$ és $f(10)$ értékeket, ha:
a) $f(x) = 0{,}2x + 1$; b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$!

11. Egy fénymásoló árát t év használat után a $B(t) = 8940 - 745t$ (hrn.) képlettel határozzák meg. Állapítsd meg:
a) milyen függvényt ad meg ez a képlet;
b) mit jelent és mennyi a $B(5)$ kifejezés;
c) a t értékét, ha $B(t) = 4470$, és magyarázd meg, ez mit jelent;
d) a fénymásoló eredeti árát!

12. Határozd meg az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények helyettesítési értékeit a -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 helyeken, ha
a) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = |2x - 3|$;
b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$!
A kapott eredményeket foglald táblázatba!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

13. Számítsd ki az $f(5) - f(3) - 1$ kifejezés értékét, ha:
a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$; b) $f(x) = (x^2 - 2)(x + 5)$!

14. Egy függvényt az $y = 2x^2 - 1$ képlet ad meg. Határozd meg:
a) a függvényértéket, ha az argumentum érteke 2; 4; 6; 8;
b) azon argumentum értéket, melynél a függvényérték 1; 3; 5; 7; 9!

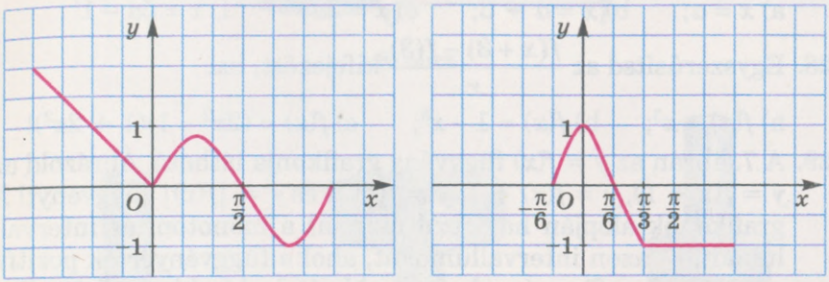
Határozd meg a függvények értelmezési tartományát (**15.**, **16.**)!

15. a) $y = \sqrt{2x}$; b) $y = \dfrac{x}{x-4}$; c) $y = \dfrac{5}{x^2+2}$; d) $y = \sqrt{x^2}$.

16. a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = \dfrac{x+4}{x-2}$; c) $y = x + \dfrac{4}{x}$; d) $y = \sqrt{x^2+1}$.

17. Határozd meg a 6. ábrán látható grafikonokkal megadott függvények:
a) értelmezési tartományát;

b) értékkészletét;
c) zérushelyeit ($y = 0$);
d) azon intervallumokat ahol $y > 0$; $y < 0$;
e) növekedésének intervallumait;
f) csökkenésének intervallumait!



a) b)

6. ábra

Ábrázold a függvényeket (**18–20.**)! A grafikonok alapján határozd meg, melyek párosak és melyek páratlanok!

18. a) $y = x^3$; b) $y = -x^2$; c) $y = x^{-2}$; d) $y = x^{\frac{1}{2}}$.

19. a) $y = 2x - 5$; b) $y = 1 - x^2$; c) $y = 3$; d) $y = \sqrt{2x}$.

20. a) $y = \sin x$; b) $y = -\cos x$; c) $y = \operatorname{tg} x$; d) $y = \operatorname{ctg} x$.

B

21. Egy vezető R ellenállása az $R = \rho\frac{l}{S}$ képlettel határozható meg, ahol l és S megfelelően a drót hossza és keresztmetszetének a területe, ρ a vezető fajlagos ellenállása. Írd fel, hogyan függ: a) S az R-től; b) l az R-től! Mi ezen függvények grafikonja?

22. Az inga l hossza és T periódusa közötti összefüggést a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ képlet írja le, ahol $\pi \approx 3{,}14$ és $g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Milyen függvényt ad meg ez az összefüggés? Milyen függvény adja meg az inga hosszának függését az inga periódusától?

Határozd meg a függvények értelmezési tartományát (**23., 24.**)!

23. a) $y = \sqrt{4 - x}$; b) $y = x^2 - 1$; c) $y = 3 - x$; d) $y = 2 + \sqrt{x}$.

24. a) $y = x^2 + 4$; b) $y = \sqrt{1 + x}$; c) $y = 3x$; d) $y = 9 - \sqrt{x}$.

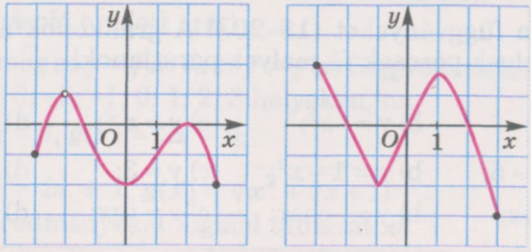
25. Bizonyítsd be, hogy az $y = f(x)$ függvény páros, ha:
a) $f(x) = x^4 + 3x^2$; b) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$!

26. Bizonyítsd be, hogy az $y = f(x)$ függvény páratlan, ha:
a) $y = x(1 - x^2)$; b) $y = 7x^3 + x$!

27. Határozd meg az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény helyettesítési értékét, ha:
a) $x = a$; b) $x = a + 3$; c) $x = 2a$; d) $x = 5a - 1$!

28. Egyszerűsítsd az $\dfrac{f(x+3) - f(3)}{x}$ kifejezést, ha:
a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = 1 - x^3$; c) $f(x) = (2x^2 - 1)(1 + 2x^2)$!

29. A 7. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Ábrázold az $y = f(x + 1)$, $y = f(x) + 1$, $y = f(|x|)$ és $y = |f(x)|$ függvényt! A grafikonok alapján határozd meg: a) a monotonitás intervallumait; b) azon intervallumokat, ahol a függvényérték pozitív, negatív; c) a függvény legnagyobb és legkisebb értékét; d) a függvény paritását!



7. ábra

Közös koordináta-rendszerben ábrázold a függvényeket, és határozd meg monotonitásuk intervallumait (**30–32.**)!

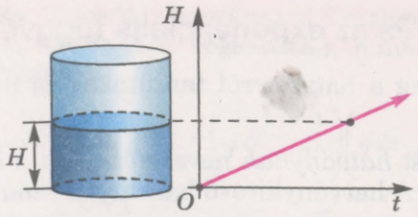
30. a) $y = 3x$; b) $y = 3x - 1$; c) $y = 3|x| - 1$; d) $y = |3x - 1|$.

31. a) $y = x^2$; b) $y = 2x^2$; c) $y = 2x^2 - 3$; d) $y = |2x^2 - 3|$.

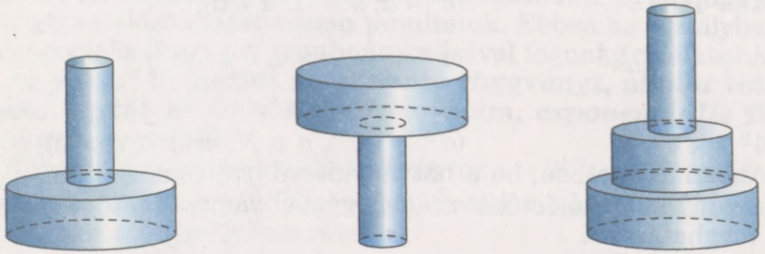
32. a) $y = \dfrac{12}{x}$; b) $y = \dfrac{12}{x} - 4$; c) $y = \dfrac{12}{|x|} - 4$; d) $y = \left|\dfrac{12}{x} - 4\right|$.

33. Két motorkerékpáros mozgását közös koordináta-rendszerben az $x_1(t) = 0{,}2t^2 + 2t$ és $x_2(t) = 80 - 4t$ függvények írják le (x kilométerekben, t percekben van megadva). Állapítsd meg a találkozásuk időpontját!

34. Ha egy tartályba a vizet egyenletes sebességgel szivattyúzzák, akkor a víz magassága az idő függvénye (8. ábra). Ábrázold a 9. ábrán látható tartályok esetében a víz magasságának változását az idő függvényében!



8. ábra



a) b) c)

9. ábra

35. Az $y = |1 - x^2|$ függvény a $[-2; 2]$ intervallumon van ábrázolva. Folytasd a grafikont a $T = 4$ periódussal az egész számegyenesen! Határozd meg:
a) $y(10)$; b) $y(100)$!

36. Ábrázolj egy függvényt a $[-1{,}5; 1{,}5]$ intervallumon! Majd folytasd a $T = 3$ periódussal!

Ismétlő feladatok

37. Hasonlítsd össze a számokat:
a) $0{,}1^{\frac{2}{3}}$ és $0{,}1^{\frac{3}{4}}$; b) $10^{\frac{2}{3}}$ és $10^{\frac{3}{4}}$; c) $\sqrt[5]{1{,}7}$ és $\sqrt[5]{2}$; d) $\sqrt[4]{12}$ és 2!

38. Add meg hatvány alakban:
a) $a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2}$; b) $(p^{0,1})^2 \cdot p^{\frac{2}{5}} \cdot p^{-0,4}$; c) $\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^2 : x^{0,5}$!

39. Oldd meg az egyenleteket:
a) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$; b) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$!

40. Szilárd 10 kárászt fogott, András 100%-kal többet. Hány halat fogtak a fiúk együtt?

2. §. Hatvány és az exponenciális függvény

Ismételjük meg a hatványról tanultakat és bővítsük ismereteinket.

Az a^α kifejezést *hatványnak* nevezzük. Itt a a hatvány alapja, α a hatványkitevő. A hatványkitevő bármilyen szám lehet. Például:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $\quad (a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}},\ a \in R,\ n \in N);$

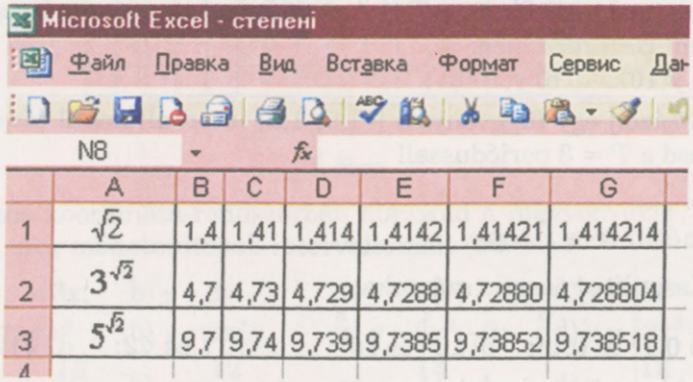
$4^1 = 4;\ 4^0 = 1$ $\quad (a^1 = a;\ a^0 = 1,\ a \neq 0);$

$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad (a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \in N);$

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $\quad (a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ n \in N,\ m \in Z,\ a > 0).$

Abban az esetben, ha a hatványkitevő irracionális szám, akkor a hatvány közelítő értékét számológéppel vagy számítógéppel tudjuk meghatározni.

A $3^{\sqrt{2}}$ és $5^{\sqrt{2}}$ kifejezések (egy tizedesjegynyi, két tizedesjegynyi, három tizedesjegynyi pontossággal) kiszámított közelítő értékeit, melyeket **Excel** programmal határoztunk meg, táblázatba foglaltuk (10. ábra).



	A	B	C	D	E	F	G
1	$\sqrt{2}$	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	1,414214
2	$3^{\sqrt{2}}$	4,7	4,73	4,729	4,7288	4,72880	4,728804
3	$5^{\sqrt{2}}$	9,7	9,74	9,739	9,7385	9,73852	9,738518

10. ábra

Tehát, $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}73;\ 5^{\sqrt{2}} \approx 9{,}74.$

Bármilyen valós $a > 0$ és α-ra az a^α kifejezés értelmezhető, értéke valamely valós szám. Ezen hatványokra teljesülnek az alábbi azonosságok:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s};$ 2) $a^r : a^s = a^{r-s};$ 3) $(a^r)^s = a^{rs};$

4) $(ab)^r = a^r b^r;$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$

Bármely valós kitevőjű hatvánnyal, melynek alapja pozitív szám, ugyanolyan műveletek végezhetők, mint az egész kitevőjű hatványokkal. Például

$$\frac{49^{\sqrt{2}} - a^{\frac{2}{\pi}}}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{(7^{\sqrt{2}})^2 - \left(a^{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{\left(7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}\right)\left(7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}\right)}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = 7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}.$$

Szervesen a hatvány fogalmához kapcsolódik a hatványfüggvény és az exponenciális függvény fogalma. A hatványfüggvényt ($y = x^p$) az előző osztályokban tanultátok. Ebben az osztályban az exponenciális függvény tanulmányozásával fogunk foglalkozni.

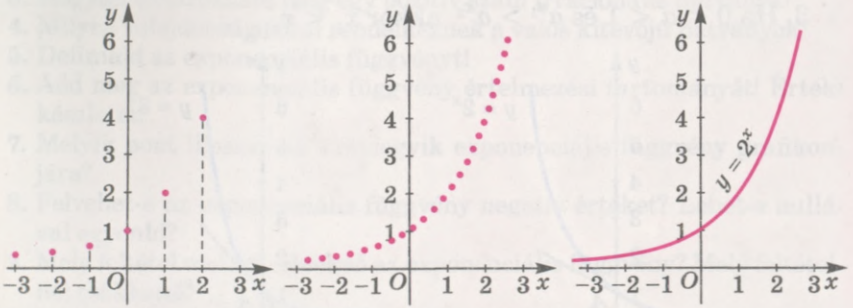
Az $y = a^x$ képlettel megadható függvényt, ahol a tetszőleges, egytől különböző pozitív szám, *exponenciális* függvénynek nevezzük.

Néhány példa exponenciális függvényre: $y = 2^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = (\sqrt{2})^x$.

Ábrázoljuk az $y = 2^x$ függvényt. Értéktáblázatot készítünk néhány egész x argumentum értékre:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

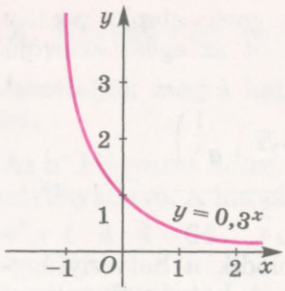
A koordináta-rendszerben tüntessük fel azokat a pontokat, melyek koordinátái a táblázat x, y számpárai (11. *a* ábra). Ha ebben a koordináta-rendszerben még több olyan pontot tüntetnénk fel, melyek koordinátáira teljesül az $y = 2^x$ egyenlőség, akkor a 11. *b* ábrát kapjuk. És ha az összes x argumentumra meghatároznánk az $y = 2^x$ képlettel hozzárendelt y értéket, majd feltüntetnénk a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyek koordinátái az így kapott számpárok, akkor egy folytonos görbét kapnánk (11. *c* ábra). Ez a görbe az $y = 2^x$ függvény grafikonja.



a) b) c)

11. ábra

Láthatjuk, hogy a függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, csak pozitív értéket vesz fel és egész értelmezési



12. ábra

tartományán nő. Az $y = 0{,}3^x$ az egész értelmezési tartományán csökkenő (12. ábra).

Foglaljuk össze az exponenciális függvény főbb tulajdonságait:

1. *Az $y = a^x$ függvény értelmezési tartománya R a valós számok halmaza,* mivel minden pozitív a számra és valós x-re az a^x kifejezésnek van számértéke.

2. *Az $y = a^x$ függvény csak pozitív értéket vesz fel,* mivel a hatványalap pozitív, így az a^x hatvány értéke is pozitív. Tehát az $y = a^x$ függvény értékkészlete a $(0; \infty)$ intervallum.

3. *Ha $a > 1$, akkor az $y = a^x$ függvény növekvő, és ha $0 < a < 1$, akkor csökkenő.* Ezt a tulajdonságot jól szemléltetik a függvények grafikonjai (lásd a 11., 12. ábrákat).

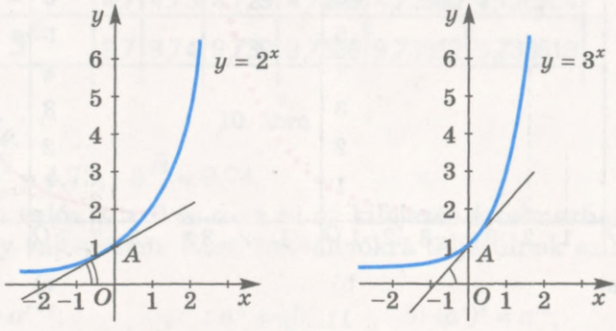
4. *Az $y = a^x$ függvény minden értékét csak egyszer veszi fel.* Tehát az x tengellyel párhuzamos egyenes az exponenciális függvény grafikonját csak egy pontban metszheti. Ez a 3. tulajdonságból következik.

5. *Az $y = a^x$ függvény se nem páros, se nem páratlan, se nem periodikus.* Mivel minden értékét csak egyszer veszi fel, így nem lehet páros és nem lehet periodikus sem. De nem lehet páratlan sem, mivel nem vesz fel negatív értéket és a nullát sem.

6. *Minden exponenciális függvény grafikonja illeszkedik az $A(0; 1)$ koordinátájú pontra,* mivel ha $a \neq 0$, akkor $a^0 = 1$.

Jegyezzétek meg az exponenciális függvény monotonitásából következő alábbi állításokat:

1. Ha $a > 0$ és $a^{x_1} = a^{x_2}$, akkor $x_1 = x_2$;
2. Ha $a > 1$ és $a^{x_1} > a^{x_2}$, akkor $x_1 > x_2$;
3. Ha $0 < a < 1$ és $a^{x_1} > a^{x_2}$, akkor $x_1 < x_2$.



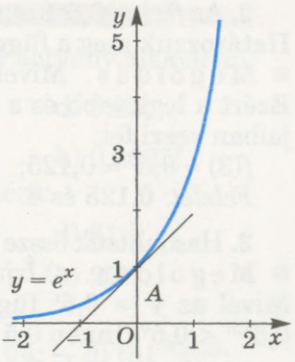
a) b)

13. ábra

Figyeljétek meg az $y = 2^x$ és $y = 3^x$ függvények grafikonjait (13. ábra). Az $y = 2^x$ függvény grafikonjához az $A(0; 1)$ pontba húzott érintőjének meredeksége kisebb 1-nél, az $y = 3^x$ függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége nagyobb egynél. Vajon létezik-e olyan exponenciális függvény, mely grafikonjához az $A(0; 1)$ pontba húzott érintő meredeksége 1? Létezik (14. ábra). Ennek az exponenciális függvénynek az alapja a 2,71828... irracionális szám, melyet e betűvel jelölünk.

Az $y = e^x$ exponenciális függvény a matematikában és alkalmazott tudományokban gyakori függvény. *Természetes alapú exponenciális* függvénynek nevezik (*exponens* latin szó, jelentése hatványkitevő).

Sok számológépen külön gomb van e^x jelöléssel. Ez a függvény valóban különleges, a természeti törvények növekedését vagy csökkenését ezzel a függvénnyel lehet modellezni.



14. ábra

Például az újraalakulás és szétesés folyamatait a $P = P_0e^{kt}$ képlettel lehet leírni. Itt P a t időpontban az újonnan alakult anyagmennyiség (vagy a lebomlott anyagmennyiség), P_0 a kezdeti mennyiség, k – konstans, melyet minden konkrét esetre meghatároznak. Önállóan keress még példákat!

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a természetes kitevőjű hatvány?
2. Hogyan értelmezhető a negatív egész kitevő? A tört kitevő?
3. Hogyan határozható meg egy pozitív szám irracionális hatványa?
4. Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a valós kitevőjű hatványok?
5. Definiáld az exponenciális függvényt!
6. Add meg az exponenciális függvény értelmezési tartományát! Értékkészletét!
7. Melyik pont illeszkedik mindegyik exponenciális függvény grafikonjára?
8. Felvehet-e az exponenciális függvény negatív értéket? Lehet-e nullával egyenlő?
9. Mely feltétel mellett növekvő az exponenciális függvény? Mely feltételnél csökkenő?
10. Mi a természetes alapú exponenciális függvény?

Közös munka

1. Egyszerűsítsük az $(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}}$ kifejezést!

● **Megoldás.**

$$(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}(1 - 5^{-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8.$$

2. Az $f(x) = 0{,}5^x$ függvény a $[-2; 3]$ intervallumon van értelmezve. Határozzuk meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

● **Megoldás.** Mivel $0{,}5 < 1$, így a függvény monoton csökken. Ezért a legkisebb és a legnagyobb értékét az intervallum végpontjaiban veszi fel:

$f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$; $\quad f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4$.

Felelet: 0,125 és 4.

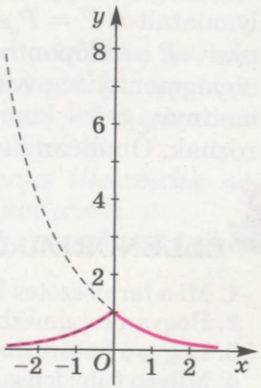
3. Hasonlítsuk össze 1-gyel az alábbi számokat: a) $0{,}5^{1,5}$; b) $(\sqrt{5})^{-0,2}$!

● **Megoldás.** a) Írjuk fel az 1-et 0,5 hatványaként. Így $1 = 0{,}5^0$. Mivel az $y = 0{,}5^x$ függvény monoton csökken és $1{,}5 > 0$, ezért $0{,}5^{1,5} < 0{,}5^0$. Innen $0{,}5^{1,5} < 1$.

b) Mivel $1 = (\sqrt{5})^0$ és az $y = (\sqrt{5})^x$ függvény monoton növekvő, továbbá $-0{,}2 < 0$, ezért $(\sqrt{5})^{-0,2} < (\sqrt{5})^0$, innen $(\sqrt{5})^{-0,2} < 1$.

4. Ábrázoljuk az $y = 0{,}5^{|x|}$ függvényt!

● **Megoldás.** Az $y = 0{,}5^{|x|}$ függvény páros függvény. Igazold önállóan! A páros függvény grafikonja szimmetrikus az ordinátatengelyre, ezért elegendő a függvényt az $x \geqslant 0$ argumentumokra ábrázolni, majd a kapott görbét tükrözni az y tengelyre. Ha $x \geqslant 0$, akkor $0{,}5^{|x|} = 0{,}5^x$. Ábrázoljuk az $y = 0{,}5^x$ függvényt, ha $x \geqslant 0$, és tükrözzük az y tengelyre (15. ábra)!



15. ábra

Szóbeli feladatok

Számítsd ki (**41–43.**)!

41. a) $81^{\frac{1}{4}}$; b) $625^{\frac{1}{4}}$; c) $0{,}0016^{\frac{1}{4}}$; d) $1^{\frac{1}{4}}$.

42. a) $9^{0,5}$; b) $6{,}25^{0,5}$; c) $0{,}16^{0,5}$; d) $0^{0,5}$.

43. a) 4^{-1}; b) 2^{-1}; c) $0{,}5^{-1}$; d) $(-1)^{-1}$.

44. Az alábbi kifejezések közül melyik nem létezik:

a) $(-4)^{-1}$; b) 2^0; c) $(-5)^{0,5}$; d) $(-1)^0$; e) π^{π}; f) $0^{-\sqrt{3}}$?

45. Az $y = x^{1,5}$, $y = x^{5-x}$, $y = \pi^x$ és $y = \sqrt{2^x}$ függvények közül melyik exponenciális?

46. Az alábbi függvények közül melyik növekvő és melyik csökkenő:
a) $y = 2{,}5^x$; b) $y = e^x$; c) $y = 0{,}5^x$; d) $y = 3^{-x}$; e) $y = \pi^x$?

47. Van-e közös pontja az alábbi függvények grafikonjainak:
a) $y = 2^x$ és $y = 2$; b) $y = 2^x$ és $y = 2x$;
c) $y = 2^x$ és $y = -2x$; d) $y = 2^x$ és $y = -2$?

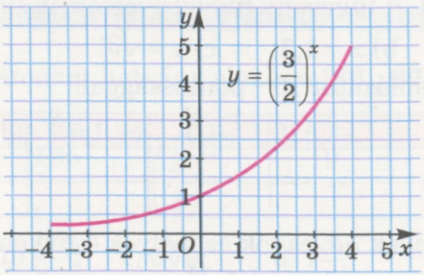
A

48. Az alábbi számokat add meg 2-es alapú hatvány alakjában:
a) 8; b) $\frac{1}{16}$; c) $\sqrt{2}$; d) 0,25;
e) 1024; f) 0,5; g) $\sqrt[3]{4}$; h) 0,0625!

49. Az alábbi számokat írd fel 3 hatványaként:
a) 81; b) 27; c) $9^{\sqrt{2}}$; d) 81^{-1};
e) $\sqrt[3]{9}$; f) 1; g) $729^{0,25}$; h) 27^{π}!

50. Számítsd ki:
a) $32^{0,4}$; b) $27^3 : 9^4$; c) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$; d) $(81^{-1})^{0,25}$;
e) $(9^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; f) $25^{\pi} : 5^{-2\pi}$; g) $49^{0,25}$; h) $2^{\pi} \cdot 0{,}5^{\pi}$!

51. Az $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ függvény grafikonjáról (16. ábra) határozd meg a közelítő értékét:
a) a függvényértéknek az alábbi abszcisszájú pontokban: -2; $-1{,}5$; 0; 1; 2,5; 3,5; 4;
b) az argumentum azon értékének, melynél a függvényérték: 0,25; 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,8; 3,5; 4,25!



16. ábra

Egyszerűsítsd a kifejezéseket (**52.**, **53.**)!

52. a) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; b) $(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}})(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}})$;
c) $(a - b) : (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$; d) $(x - 4) : (x^{0,5} + 2)$.

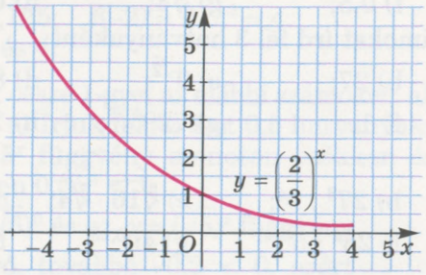
53. a) $(x^{\frac{1}{3}} - 1)(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1)$; b) $(n^{\frac{1}{3}} + 2)(n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{1}{3}} + 4)$;

c) $(a - 8) : (a^{\frac{1}{3}} - 2)$; d) $(1 - x) : (1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})$.

54. Az $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ függvény grafikonjáról (17. ábra) határozd meg a közelítő értékét:

a) a függvényértéknek az alábbi abszcisszájú pontokban: –2; –1; 0; 1; 1,5; 2; 3; 4;

b) az argumentum azon értékének, melynél a függvényérték: 0,25; 0,4; 0,5; 1;2; 1,5; 2,8; 3,5; 4,25!



17. ábra

55. Jellemezd az alábbi függvényeket:

a) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; b) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$!

56. Ábrázold az alábbi függvényeket: a) $y = 4^x$; b) $y = 0{,}5^x$!

57. Zsebszámológéppel határozd meg az alábbi argumentumokhoz tartozó $y = 1{,}7^x$ függvény függvényértékeit 10^{-4} pontossággal:

a) $x = 0{,}5$; b) $x = 1{,}3$; c) $x = \sqrt{3}$!

58. Töltsd ki a táblázatot 10^{-3} pontossággal!

x	–3,5	–2,5	–1,5	1,5	2,5	3
2^x						
$0{,}5^x$						

59. Mely függvények növekvők és melyek csökkenők:

a) $y = 5^x$; b) $y = \left(\frac{9}{10}\right)^x$; c) $y = (\sqrt{2})^x$;

d) $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; e) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; f) $y = 2^{-x}$;

g) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$; h) $y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$?

60. Hasonlítsd össze az alábbi számokat az 1-gyel:

a) $2^{-\sqrt{5}}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; c) $0{,}3^2$; d) $1{,}7^3$;

e) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$; g) $(\sqrt{2})^3$; h) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^e$!

61. Hasonlítsd össze a számokat:

a) $4^{-\sqrt{3}}$ és $4^{-\sqrt{2}}$; b) $2^{\sqrt{3}}$ és $2^{1,7}$; c) $5^{0,2}$ és $5^{-1,2}$;

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ és $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$; e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ és $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ és $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$!

62. Illeszkedik-e az A pont az $y = 4^x$ függvény grafikonjára, ha:
a) $A(4; 16)$; b) $A(4; 256)$; c) $A(-2; -0{,}5)$; d) $A(-2; 0{,}0625)$?

63. Illeszkedik-e az M pont az $y = (\sqrt{3})^x$ függvény grafikonjára, ha:
a) $M(1; \sqrt{3})$; b) $M(\sqrt{3}; 3)$; c) $M(2; 3)$; d) $M(0; 0)$?

64. Határozd meg az a értékét úgy, hogy az $y = a^x$ függvény grafikonja illeszkedjen a: a) $P(2; 9)$; b) $P(0{,}5; 0{,}2)$; c) $P(-1; 0{,}5)$ pontra!

65. Határozd meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét a megadott intervallumon:
a) $y = 3^x$ a $[-1; 3]$ intervallumon;
b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ a $[-1; 3]$ intervallumon;
c) $y = 4^x$ a $[-0{,}5; 2]$ intervallumon;
d) $y = 0{,}25^x$ a $[-0{,}5; 2]$ intervallumon!

B

Add meg a számokat hatvány alakban (**66., 67.**)!

66. a) $\sqrt[4]{27}$; b) $\frac{8}{125}$; c) $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}$; d) $5\frac{4}{9}$.

67. a) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^5}$; b) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; c) $3\sqrt[3]{9}$; d) $7\frac{1}{5}$.

Határozd meg a kifejezés értékét (**68., 69.**)!

68. a) $243^{0,4}$; b) $(27^3)^{\frac{2}{9}}$; c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}$; d) $8^{2\frac{1}{3}} : 81^{0,75}$.

69. a) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; b) $3^{-2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}}$; c) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; d) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

Ábrázold a függvényt, és határozd meg az értékkészletét (**70., 71.**)!

70. a) $y = 3^{-x}$; b) $y = -2^{x}$; c) $y = 2^{2x}$; d) $y = -2^{-2x}$.

71. a) $y = 2^{x} - 3$; b) $y = 2 + 2^{x}$; c) $y = 2^{x-3}$; d) $y = 2 \cdot 2^{x}$.

72. Az alábbi egyenleteket oldd meg grafikusan:
a) $3^{x} = 4 - x$; b) $4^{x} + x = 5$; c) $0{,}5^{x} = \sqrt{x+5}$!

73. Az $y = 2^{x}$ függvény növekedését felhasználva oldd meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenségeket:
a) $2^{x} = 16$; $2^{x} > 16$; $2^{x} \leqslant 16$;
b) $2^{x} = 0{,}25$; $2^{x} \geqslant 0{,}25$; $2^{x} \leqslant 0{,}25$;
c) $2^{x} = \sqrt{32}$; $2^{x} \geqslant \sqrt{32}$; $2^{x} < \sqrt{32}$!

74. Az $y = 0{,}2^{x}$ függvény csökkenését felhasználva oldd meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenségeket:
a) $0{,}2^{x} = 0{,}04$; $0{,}2^{x} > 0{,}04$; $0{,}2^{x} \leqslant 0{,}04$;
b) $0{,}2^{x} = \frac{1}{625}$; $0{,}2^{x} \leqslant \frac{1}{625}$; $0{,}2^{x} > \frac{1}{625}$;
c) $0{,}2^{x} = 25$; $0{,}2^{x} > 25$; $0{,}2^{x} \leqslant 25$!

75. Egy entomológus, a sáskajárást tanulmányozva megfigyelte, hogy a fertőzött élőhely (m^2-ekben mérve) az $S_n = 1000 \cdot 2^{0{,}2n}$ képlet szerint változik, ahol n a hetek száma.
Határozd meg:
a) a fertőzött terület kezdeti értékét;
b) a fertőzött terület nagyságát 5 hét múlva;
c) a fertőzött terület nagyságát 10 hét múlva!

76. A CD-lejátszó kikapcsolásának pillanatában az áramerősség az $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^{t}$ (A) összefüggés szerint csökken, ahol I az áramerősség amperben mérve, t az idő másodpercben. Határozd meg:
a) az áramerősséget a kikapcsolás pillanatában;
b) $I(t)$-t, ha t egyenlő: 1 s; 2 s; 3 s; 4 s;
c) a CD-lejátszó kikapcsolása után mennyi idő elteltével lesz az áramerősség 4 A? Alkalmazzátok az $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^{t}$ összefüggés grafikonját!

77. Egy baktériumtenyészet tömegváltozása az $m(t) = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ (g) képlettel írható le, ahol t a tenyésztés kezdete óta eltelt idő órákban mérve. Határozd meg a tenyészet tömegét:
a) 30 perc múlva; b) 40 perc múlva; c) 1 óra múlva;
d) 3 óra múlva; e) 4 óra múlva f) 6 óra múlva!
Rajzold meg a megfelelő grafikont!

Ismétlő feladatok

78. Egy mértani sorozat első tagja $b_1 = 0{,}25$, kvóciense $q = 2$. Határozd meg b_{10} és S_{10} értékét!

79. Ókori kínai feladat. 5 ökör és 2 bárány ára 10 tallér, 2 ökör és 8 bárány viszont 8 tallérba kerül. Mennyit kell fizetni egy ökörért és egy bárányért külön-külön?

80. Írd fel az alábbi számokat normálalakban:

a) 47 000 000; b) 308 000 000; c) 0,000000039;
d) 0,00000407; e) $803 \cdot 10^9$; f) $0{,}067 \cdot 10^7$!

3. §. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek

Egy egyenletet *exponenciálisnak* nevezünk, ha az ismeretlen *csak* a hatványkitevőben szerepel, míg a hatványalap állandó.

Példák:

$9^x = \sqrt{3}$; $4^x + 2^{x+1} = 3$; $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x - (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 2$.

Nagyon sokféle exponenciális egyenlet létezik és így megoldásuk is többféle módszert igényel. A főbb módszerek a következők:

I. Az egyenlet mindkét oldalát azonos alapú hatványokká alakítjuk.

II. Új változót vezetünk be.

III. Függvényelméleti, grafikus módszer.

Mindegyik módszert részletesebben konkrét példákon ismertetjük.

I. Az egyenlet mindkét oldala azonos alapú hatványokká alakítható, ha az egyenlet mindkét oldalán egytagú kifejezés van, melyek az $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ alakra hozhatók.

Az ilyen egyenletek megoldása az exponenciális függvény szigorú monotonitásából következik.

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor az $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ és az $f(x) = \varphi(x)$ egyenletek ekvivalensek.

1. példa. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket: a) $4^{x-5} = 8^{2x}$; b) $3^x = 7^x$!

● Megoldás. a) Írjuk fel az egyenlet jobb és bal oldalát 2 hatványaként: $(2^2)^{x-5} = (2^3)^{2x}$ vagy $2^{2x-10} = 2^{6x}$, innen $2x - 10 = 6x$, $4x = -10$, $x = -2{,}5$.

b) Mivel $7^x > 0$, ezért a $3^x = 7^x$ egyenlet mindkét oldalát el lehet osztani 7^x-nel. Ebből következik, hogy $\frac{3^x}{7^x} = 1$, vagyis $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$. Írjuk fel az 1-et $\frac{3}{7}$-es alapú hatványként. Akkor $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0$, innen $x = 0$.

Felelet: a) –2,5; b) 0.

II. Új változó bevezetése.

2. példa. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $4^x + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$; b) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$.

● **Megoldás.** a) $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$. Vezessük be a $2^x = y$ új változót. Így az $y^2 + 4y - 32 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek a gyökei $y_1 = -8$ és $y_2 = 4$. Az y_1 hamis gyök, mivel $2^x \neq -8$. Oldjuk meg a $2^x = 4$ egyenletet; $2^x = 2^2$, innen $x = 2$.

b) Hozzuk az egyenletet $3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 75$, vagy $3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x = 75$ alakra. Bevezetve a $3^x = y$ új változót, a $3y - \frac{2}{9}y = 75$ egyenlethez jutunk. Megoldjuk a kapott egyenletet: $27y - 2y = 675$, $25y = 675$, $y = 27$. Így $3^x = 27$, $3^x = 3^3$, innen $x = 3$.

Felelet: a) 2; b) 3.

A második egyenlet megoldásánál nem feltétlenül szükséges új változót bevezetni, ki lehetett volna emelni 3^x hatványát. Épp ezért ezt a módszert a *közös tényező kiemelése* módszerének is nevezzük.

III. Függvényelméleti, grafikus módszer során grafikonok ábrázolásával vagy próbálgatással meghatározzuk az egyenlet gyökét, majd igazoljuk, hogy ez az egyetlen megoldás.

3. példa. Oldjuk meg a $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0{,}5^x$ egyenletet!

● **Megoldás.** Grafikusan vagy próbálgatással meghatározzuk, hogy $x = 1$ gyöke az egyenletnek. Mivel az $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ függvény monotonon nő ($\frac{3}{2} > 1$), az $y = 1 + 0{,}5^x$ függvény viszont csökkenő ($0{,}5 < 1$), így az egyenletnek nincs több megoldása.

Ha egy exponenciális egyenletben az egyenlőség jelét kicseréljük az egyenlőtlenség jelére, akkor exponenciális egyenlőtlenséget kapunk.

Egy egyenlőtlenséget *exponenciális* egyenlőtlenségnek nevezünk, ha az ismeretlen *csak* a hatványkitevőben szerepel, míg a hatványalap állandó.

Az exponenciális egyenlőtlenségek megoldásánál azokat a módszereket alkalmazzuk, melyeket az exponenciális egyenletek megoldásánál is alkalmaztunk és az egyszerű,

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \text{ vagy } a^{f(x)} \geqslant a^{\varphi(x)}$$

alakú exponenciális egyenlőtlenségek megoldásának szabályait, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$.

Az ilyen egyenlőtlenségek megoldásánál az exponenciális függvény monotonitását (növekedését vagy csökkenését) kell figyelembe venni:

1. ha $a > 1$ és $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, akkor $f(x) > \varphi(x)$;
2. ha $0 < a < 1$ és $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, akkor $f(x) < \varphi(x)$.

4. példa. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:
a) $2^x \cdot 3^x > 36$; b) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$!

● **Megoldás.** a) Írjuk fel az egyenlőtlenség jobb és bal oldalát 6 hatványaként: $6^x > 6^2$.

Mivel $6 > 1$, így $x > 2$, vagy $x \in (2; \infty)$.

b) Vezessük be a $7^x = y$ jelölést, így $7^{2x} = y^2$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenlőtlenségbe, a $3y^2 - 2y - 1 < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel a $3y^2 - 2y - 1$ másodfokú polinomnak két gyöke van, mégpedig a $-\frac{1}{3}$ és az 1, így az adott egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{1}{3} < y < 1, \text{ vagy } \begin{cases} y < 1, \\ y > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Mivel $y = 7^x > 0$, ezért az $y > -\frac{1}{3}$ feltétel mindig teljesül.

Ha $y < 1$, akkor $7^x < 1$, vagyis $7^x < 7^0$. Tehát, $x < 0$, vagy $x \in (-\infty; 0)$.

Felelet: a) $(2; \infty)$; b) $(-\infty; 0)$.

Az exponenciális egyenleteket és egyenlőtlenségeket a *transzcendens* (nem algebrai) egyenletek és egyenlőtlenségek közé soroljuk. Transzcendens egyenletek és egyenlőtlenségek a trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek is. De transzcendens egyenletek és egyenlőtlenségek azok az egyenletek és egyenlőtlenségek is, melyekben transzcendens és algebrai kifejezés is van:

$$5^{x+1} + 5x > 10; \quad 2^x = \sqrt{x+2}; \quad \pi^x - 1 = \sin x.$$

Az ilyen egyenletek közül csak néhánynak tudjuk meghatározni a pontos gyökét. A közelítő gyököket leggyakrabban grafikus módszerrel határozzák meg.



ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mely egyenletet nevezzük exponenciálisnak? Hozz fel példákat!
2. Mely egyenlőtlenségeket nevezzük exponenciálisnak? Hozz fel példákat!
3. Hány megoldása lehet az $a^x = b$ egyenletnek $(a > 0, a \neq 1)$?
4. Milyen módszereket ismersz exponenciális egyenletek megoldására?
5. Mely egyenlőtlenségeket soroljuk az egyszerű exponenciális egyenlőtlenségek közé?
6. Hogyan kell megoldani az egyszerű exponenciális egyenlőtlenségeket?

Közös munka

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 3\frac{3}{8}$; b) $2^{5x} + 2^{5x-1} + 2^{5x+2} = 22$!

● **Megoldás.** a) Írjuk fel az egyenlet jobb oldalát áltört alakban: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{27}{8}$.

Az egyenlet mindkét oldalát írjuk fel $\frac{2}{3}$ alapú hatványként. Így kapjuk a $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ egyenletet, innen $2x = -3$, $x = -1{,}5$.

b) Írjuk fel az adott egyenletet $2^{5x} + 2^{5x} \cdot 2^{-1} + 2^{5x} \cdot 2^2 = 22$ alakban. Emeljük ki a 2^{5x} közös tényezőt a zárójel elé, és végezzük el a zárójelben a műveleteket. Azt kapjuk, hogy $2^{5x} \cdot (1 + 2^{-1} + 2^2) = 22$, vagyis $2^{5x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + 4\right) = 22$, innen $2^{5x} \cdot 5{,}5 = 22$. Oldjuk meg a kapott egyenletet: $2^{5x} = 4$, $2^{5x} = 2^2$, $5x = 2$, $x = \frac{2}{5}$.

Felelet: a) $-1{,}5$; b) $\frac{2}{5}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $0{,}5^{5-3x} \leqslant 0{,}25$; b) $3^{2x+4} - 2 \cdot 3^{x+2} \leqslant 3$!

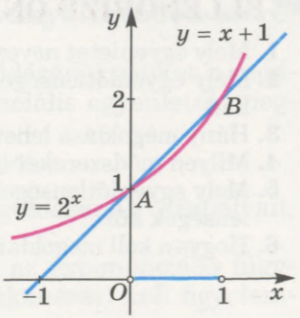
● **Megoldás.** a) Az egyenlet jobb oldalát írjuk fel 0,5 alapú hatványként: $0{,}5^{5-3x} \leqslant (0{,}5)^2$. Mivel $0{,}5 < 1$, ezért $5 - 3x \geqslant 2$, $-3x \geqslant -3$, innen $x \leqslant 1$ vagy $x \in (-\infty; 1]$.

b) Vezessük be a $3^{x+2} = y$ új változót, akkor $3^{2x+4} = y^2$. Így az $y^2 - 2y - 3 \leqslant 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, melynek megoldása a $[-1; 3]$ intervallum. Figyelembe véve, hogy $y > 0$, így $0 < 3^{x+2} \leqslant 3$. Ebből következik, hogy $x + 2 \leqslant 1$, tehát $x \leqslant -1$ vagy $(-\infty; -1]$.

Felelet: a) $(-\infty; 1]$; b) $(-\infty; -1]$.

3. Oldjuk meg grafikusan a $2^x < x + 1$ egyenlőtlenséget!

● **Megoldás.** Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y = 2^x$ és $y = x + 1$ függvények grafikonjait (18. ábra). A két grafikon az $A(0; 1)$ és $B(1; 2)$ pontokban metszi egymást. Leellenőrizve, meggyőződhetünk róla, hogy a pontok koordinátái az egyenlet pontos gyökei és nem közelítő értékei. Tehát a 2^x kifejezés értéke kisebb az $x + 1$ kifejezés megfelelő értékénél, ha $0 < x < 1$.



18. ábra

Felelet: $(0; 1)$.

Szóbeli feladatok

81. Az alábbi egyenletek közül melyik exponenciális:
a) $2^x = 3$; b) $\sqrt{x} = 4$; c) $2 - 0{,}5^x = 0$; d) $x^2 = 2^2$?

82. Hány gyöke van az egyenletnek:
a) $12^x = 3$; b) $1 + 2^x = 0$; c) $5^x = 0$; d) $3^{2x} = 4$?

83. Van-e megoldásuk az alábbi egyenlőtlenségeknek:
a) $10^x > 10$; b) $7^x < -9$; c) $5^x \leqslant 0{,}5$; d) $5^x > -5$; e) $4^x \leqslant 0$?

84. Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:
a) $3^x = 81$; b) $7^x = 1$; c) $5^x = 625$; d) $6^x = -2$; e) $4^{-x} = 16$!

85. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
a) $3^x > 1$; b) $7^x < 49$; c) $5^x \leqslant 125$; d) $15^x > -2$; e) $4^x \leqslant 0{,}25$!

A

86. Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:
a) $2^x = 4$; b) $3^x = 81$; c) $5^x = 1$; d) $3^x = 5$;
e) $2^x = -4$; f) $0{,}1^x = 0{,}01$; g) $e^x = e$; h) $0{,}5^x = 0{,}125$!

87. Oldd meg az alábbi egyenleteket:
a) $3^{x-2} = 27$; b) $4^{2x-1} = 16$; c) $5^{x+3} + 3 = 4$; d) $2^{x+1} = 3$!

Az egyenletek jobb és bal oldalát írd fel azonos alapú hatványként, és oldd meg őket (**88., 89.**)!

88. a) $2 \cdot 4^x = 8^{x+1}$; b) $27^{x-1} = 9^{x+1}$;
c) $(0{,}1)^x = 100$; d) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$.

89. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{9}{4}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -4$; d) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{x-3} = \frac{16}{25}$.

Oldd meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket (**90., 91.**)!

90. a) $2^{x+1} = 16$, $2^{x+1} \geqslant 16$; b) $3^{2-x} = 27$, $3^{2-x} < 27$;
c) $4^{x-1} = 32$, $4^{x-1} \leqslant 32$; d) $8^{x+2} = 128$, $8^{x+2} > 128$.

91. a) $9^{-x} = 27$, $9^{-x} > 27$; b) $8^{-x} = 16$, $8^{-x} < 16$;
c) $3^{8-2x} = 1$, $3^{8-2x} < 1$; d) $4^{3+5x} = 1$, $4^{3+5x} > 1$.

Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket (**92–95.**)!

92. a) $3^x > 1$; b) $4^{2x} \leqslant 0{,}25$; c) $5^{x-1} \leqslant 125$;
d) $5^x > -2$; e) $7^{-x} < 49$.

93. a) $2^x < 32$; b) $0{,}2^x > 0{,}008$; c) $10^x < 0{,}001$.

94. a) $5^{2x} < 25^{x+1}$; b) $0{,}1^{3x} < 0{,}1^{2x-3}$; c) $\pi^x < \pi^{2+3x}$.

95. a) $0{,}5^x \leqslant \frac{1}{4}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} > \frac{9}{4}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -4$; d) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+3} \leqslant 1\frac{24}{25}$.

Az alábbi egyenleteket oldd meg a közös tényező kiemelésének módszerével (**96., 97.**)!

96. a) $3^{x+1} + 3^x = 108$; b) $2^{x+2} + 2^x = 5$;
c) $2^x - 2^{x-2} = 12$; d) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$.

97. a) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$; b) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$;
c) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$; d) $5 \cdot 0{,}5^{x-3} + 0{,}5^{x+1} = 162$.

Oldd meg az egyenleteket változócserével (**98–100.**)!

98. a) $6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; b) $64^x - 8^x - 56 = 0$;
c) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$; d) $7^{2x} + 7 = 8 \cdot 7^x$.

99. a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; b) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;
c) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; d) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$.

100. a) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$; b) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$;
c) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$; d) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket (**101–104.**)!

101. a) $3^{x+2} - 3^x < 8$; b) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

102. a) $5^{x+1} + 5^x > 150$; b) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.

103. a) $2^{2x} - 2^x < 0$; b) $0{,}25^x - 0{,}5^{x+1} - 3 < 0$.

104. a) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; b) $3^{-2x} - 3^{-x} \geqslant 0$.

105. Az alábbi egyenlőtlenségeket oldd meg grafikusan:
a) $2^x > 4$; b) $0{,}5^x \geqslant 8$; c) $2^{-x} < 0{,}5$!

B

Oldd meg a következő egyenleteket (**106–112.**)!

106. a) $4^{x-2} = 2$; b) $9^{3-x} = \sqrt{3}$; c) $5^{2x-1} = 125$.

107. a) $8^{2x-1} = 2\sqrt{2}$; b) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$; c) $(\sqrt{7})^{x+1} = 49$.

108. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$; b) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$; c) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}\right)^x = \frac{27}{250}$.

109. a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} = 3^{5x-1}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$;
c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$; d) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$.

110. a) $8^{x+1} = 5^{x+1}$; b) $13^{x-3} - 11^{3-x} = 0$;
c) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$; d) $2^x \cdot 3^{2x} = 324$.

111. a) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
b) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$.

112. a) $7^{3x+3} + 7^{3x+2} + 7^{3x+1} = 57$; b) $4^{4x-1} + 4^{4x-2} + 4^{4x-3} = 168$.

113. A változó mely értékeinél lesz az alábbi kifejezések értéke: 1) eggyel egyenlő; 2) nem nagyobb 1-nél:
a) $0{,}3^{x^2-x}$; b) 7^{x^2-4}; c) $5^{x(x+3)}$; d) $0{,}5^{x^2-3x+2}$; e) $4^{\sqrt{x}-1}$?

Oldd meg az egyenlőtlenségeket (**114., 115.**)!

114. a) $3^{x+0,5} \cdot 3^{x-2} \geqslant 3$; b) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} \leqslant 2$;
c) $8^x \cdot 4^{x+13} < \frac{1}{16}$; d) $2^{x-2} \cdot 4^{1+x} > \frac{1}{8}$.

115. a) $13^{2x+1} - 13^x < 12$; b) $3^{2x+1} > 10 \cdot 3^x - 3$;
c) $9^x + 3^{x+1} > 108$; d) $4^x + 2^{x+1} > 80$.

116. Az alábbi egyenlőtlenségeket oldd meg grafikusan:
a) $2^x \leqslant \frac{2}{x}$; b) $0{,}5^x \geqslant x + 3$; c) $3x + x > 4$!

117. Egy 120 °C-ra felhevített fémgolyót egy 20 °C-os hőmérsékletű helységbe vittek. Hány perc múlva hűl le a golyó 84 °C fokra, ha a lehűlési törvényt a $D = D_0 \cdot b^{kt}$ képlet írja le, ahol D a test hőmérséklete és a környezet hőmérséklete közötti különbség; D_0 a test hőmérséklete és a környezet hőmérséklete közötti kezdeti különbség; t az idő percben mérve; b és k a test alakjától és anyagától függő állandók? Az adott esetben $b = 0{,}8$, $k = 0{,}1$.

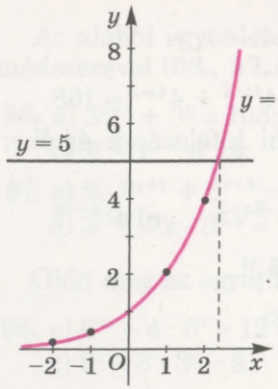
Ismétlő feladatok

118. Számítsd ki:
a) $81^{0,75}$; b) $32^{0,6}$; c) $25^{1,5}$; d) $100^{2,5}$!

119. Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:
a) $y = -7x + 3$; b) $y = x^2 - 4$; c) $y = \sqrt{x+4}$;
d) $y = \frac{3}{x+9}$; e) $y = \frac{-1}{x^2+4}$; f) $y = \frac{x}{1-x}$!

120. Határozd meg annak az exponenciális függvénynek az alapját, melynek a grafikonjára illeszkedik az alábbi pont:
a) $A(5; 32)$; b) $B(-1; 2)$; c) $C(-2; 4)$!

4. §. A logaritmus fogalma és a logaritmusfüggvény



19. ábra

1. Logaritmus. Nem nehéz leellenőrizni, hogy az $x = 2$ gyöke a $2^x = 4$ egyenletnek, és $x = 3$ pedig gyöke a $2^x = 8$ egyenletnek. De mi a megoldása a $2^x = 5$ egyenletnek? Ha az egyenletet grafikusan oldjuk meg, akkor meggyőződhetünk arról, hogy az egyenletnek egyetlen megoldása van (19. ábra). Ez a szám kettőnél nagyobb, háromnál kisebb, de hogyan lehet felírni?

Legyen a egytől különböző pozitív szám. Ha az $a^\alpha = b$ egyenlőség teljesül, akkor az α számot a b szám a alapú *logaritmusának* nevezzük.

Tehát **a b szám a alapú *logaritmusának* nevezzük azt a *hatványkitevőt*, amelyre az a-t emelve a b számot kapjuk.** A b szám a alapú logaritmusát így jelöljük: $\log_a b$.

Példák:

$\log_2 8 = 3$, mert $2^3 = 8$; $\log_{0,5} 16 = -4$, mert $0{,}5^{-4} = 16$.

A logaritmus alapja bármilyen 1-től különböző pozitív valós szám lehet. Az $a^\alpha = b$ egyenlőségből következik, ha a pozitív, akkor b is pozitív. Tehát ha a b nempozitív (negatív vagy nulla), $\log_a b$ nem létezik. Csak pozitív számnak van logaritmusa.

Az adott alap esetén adott hatványértékhez tartozó hatványkitevő meghatározását *logaritmálásnak* nevezzük. Ez a művelet a hatványozás inverze.

A logaritmus definíciója szerint, ha $a^\alpha = b$, akkor $\alpha = \log_a b$. Innen kapjuk az alábbi azonosságot

$$a^{\log_a b} = b.$$

Ez az azonosság a ***logaritmus definíciója, alapazonossága*** és teljesül bármely pozitív a-ra, $a \neq 1$ és bármely pozitív b-re.

Például:

$$2^{\log_2 32} = 32;\ (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 25} = 25;\ 0{,}1^{\log_{0,1} 0{,}001} = 0{,}001.$$

A logaritmus definíciója alapján bármely pozitív számot fel lehet írni adott alapú hatványként.

Például: $7 = 5^{\log_5 7}$; $7 = 12^{\log_{12} 7}$; $7 = 0{,}5^{\log_{0,5} 7}$.

Bármely pozitív x, y és a-ra, $a \neq 1$ teljesülnek az alábbi azonosságok:

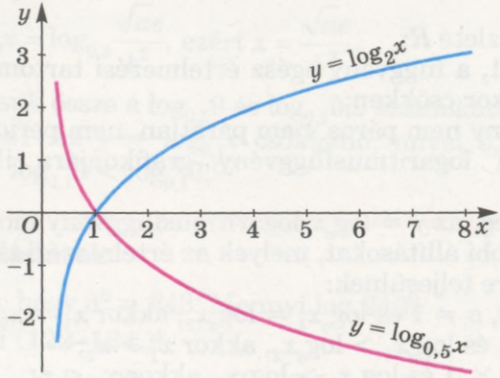
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\ \log_a x^p = p\log_a x.$$

Bebizonyítjuk az első azonosságot. Legyen $\log_a x = m$ és $\log_a y = n$. Ebből $a^m = x$ és $a^n = y$, innen $a^m \cdot a^n = xy$ vagyis $a^{m+n} = xy$.

Ebben az esetben $m + n$ az xy szorzat a alapú logaritmusa, vagyis $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$, amit be kellett bizonyítanunk.

A bebizonyított tulajdonság az mondja ki, hogy a szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusainak összegével. Hasonlóképpen igazolható a tört és a hatvány logaritmusa (bizonyítsd be önállóan). Több évszázadon át a logaritmus azonosságai és a logaritmustáblázat segítségével egyszerűsítették a bonyolult számításokat. A logaritmus segítségével a szorzat helyettesíthető a tényezők logaritmusainak összegével. A hányados különbséggel, a hatványozás szorzással. Csak a XX. század második felében szorította ki a logaritmust a számológép és számítógép. A múlt homályába veszett azóta a mérnökök és tudósok számoló eszköze, a logarléc is. Azonban a logaritmusfüggvényt a mai napig gyakran alkalmazzák.

2. Logaritmusfüggvény. Azt a függvényt nevezzük *logaritmusfüggvénynek*, melyet az $y = \log_a x$ hozzárendelési szabály ad meg, ahol x az argumentum, a egytől különböző pozitív valós szám. Néhány példa logaritmusfüggvényre: $y = \log_2 x$; $y = \log_{0,5} x$. A 20. ábrán ezen függvények grafikonjai láthatók.

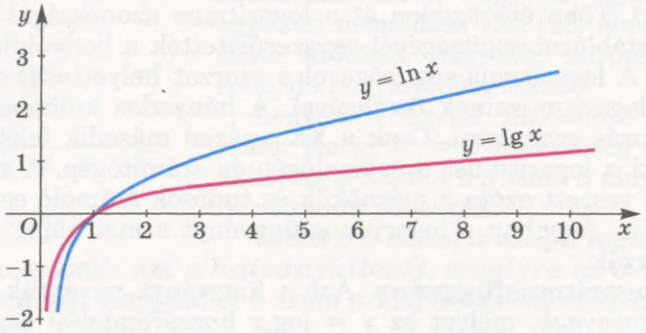


20. ábra

A logaritmusfüggvény ábrázolásához nem feltétlenül szükséges értéktáblázat. Megfigyelhető, hogy az $y = \log_a x$ függvény grafikonja és az $y = a^x$ függvény grafikonja tükrös az első koordinátanegyed szögfelezőjére. Tehát az $y = \log_a x$ és az $a^y = x$ egyenlőségek az x és y közötti összefüggést fejezik ki. Ha a második egyenlőségben megcseréljük a változókat, x-t y-ra és y-t x-re, ez ugyanazt jelenti, mintha megcseréltük volna a koordinátatengelyeket. Az olyan

függvényeket, mint az $y = \log_a x$ és az $y = a^x$, *inverz* függvényeknek nevezzük. Közös koordináta-rendszerben ábrázold az $y = \log_2 x$ és az $y = 2^x$ függvényt, és győződj meg róla, hogy valóban tükrösek az $y = x$ egyenesre.

Leggyakrabban az e és a 10-es alapú logaritmusokat alkalmazzák. Ezeket megfelelően *természetes* és *tízes alapú logaritmusnak* nevezik. Jelölésük lg és ln. Az $y = \ln x$ és $y = \lg x$ függvények grafikonja a 21. ábrán látható.



21. ábra

A logaritmusfüggvény fő tulajdonságai:

1) az $y = \log_a x$ függvény értelmezési tartománya a $(0; \infty)$ intervallum;

2) értékkészlete R;

3) ha $a > 1$, a függvény egész értelmezési tartományán nő, ha $0 < a < 1$, akkor csökken;

4) a függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus;

5) minden logaritmusfüggvény grafikonjára illeszkedik az $A(1; 0)$ pont.

Jegyezd meg, az $y = \log_a x$ logaritmusfüggvény monotonitásából következő alábbi állításokat, melyek az értelmezési tartomány bármely x értékére teljesülnek:

1) ha $a > 0$, $a \neq 1$ és $\log_a x_1 = \log_a x_2$, akkor $x_1 = x_2$;

2) ha $a > 1$ és $\log_a x_1 > \log_a x_2$, akkor $x_1 > x_2$;

3) ha $0 < a < 1$ és $\log_a x_1 > \log_a x_2$, akkor $x_1 < x_2$.

Az exponenciális és logaritmusfüggvényekkel modellezhető a lakosság növekedése, a tőke felhalmozása, a baktériumok szaporodása, a légnyomás változása, a radioaktív bomlás és így tovább.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a b szám a alapú logaritmusa? Hogyan jelöljük?
2. Milyen kikötéseket kell tenni a logaritmus alapjára?
3. Létezik-e negatív szám logaritmusa? És a nullának?

4. Milyen egyenlőséggel írható le a logaritmus fogalma?
5. Mivel egyenlő a szorzat logaritmusa? A hányados logaritmusa?
6. Mi a 10-es alapú logaritmus? A természetes alapú logaritmus? Hogyan jelöljük?
7. Definiáld a logaritmusfüggvényt!
8. Mi a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya? Értékkészlete?
9. Melyik pont illeszkedik bármely logaritmusfüggvény grafikonjára?
10. Lehet-e a logaritmusfüggvény argumentuma negatív szám? És nulla?
11. Milyen feltétel mellett növekvő a logaritmusfüggvény, és milyen feltétel mellett csökkenő?

Közös munka

1. Számítsd ki: a) $3\lg 5 + 0{,}5\lg 64$; b) $25^{1-0{,}5\log_5 10}$!

● **Megoldás.**

a) $3\lg 5 + 0{,}5\lg 64 = \lg 5^3 + \lg 64^{0{,}5} = \lg 125 + \lg 8 = \lg 1000 = 3$;

b) $25^{1-0{,}5\log_5 10} = 25 : (25^{0{,}5})^{\log_5 10} = 25 : 5^{\log_5 10} = 25 : 10 = 2{,}5$.

2. Határozzuk meg az x értékét:
$\log_{0,3} x = 0{,}5\log_{0,3} a - 2\log_{0,3} b + \log_{0,3} c$!

● **Megoldás.** $\log_{0,3} x = 0{,}5\log_{0,3} a - 2\log_{0,3} b + \log_{0,3} c =$

$= \log_{0,3} a^{0{,}5} - \log_{0,3} b^2 + \log_{0,3} c = \log_{0,3} \dfrac{\sqrt{ac}}{b^2}$.

Mivel $\log_{0,3} x = \log_{0,3} \dfrac{\sqrt{ac}}{b^2}$, ezért $x = \dfrac{\sqrt{ac}}{b^2}$.

3. Hasonlítsuk össze a $\log_{0,1} 9$ és $\log_{0,1} 0{,}9$ számokat!

● **Megoldás.** Az $y = \log_{0,1} x$ csökkenő, mivel $0{,}1 < 1$. Mivel $9 > 0{,}9$, akkor $\log_{0,1} 9 < \log_{0,1} 0{,}9$.

Szóbeli feladatok

121. Ismeretes, hogy $3^5 = 243$. Mennyi $\log_3 243$?

Számítsd ki (**122–124.**)!

122. a) $\log_2 4$; b) $\log_2 32$; c) $\log_2 0{,}5$; d) $\log_2 4$; e) $\log_2 2$.

123. a) $\log_3 3$; b) $\log_3 81$; c) $\log_3 27$; d) $\log_3 1$; e) $\log_3 9$.

124. a) $\log_{0,5} 2$; b) $\log_{0,5} 1$; c) $\log_{0,5} 0{,}5$; d) $\log_{0,5} 4$; e) $\log_{0,5} 8$.

125. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket: a) $3^{\log_3 x}$; b) $7^{\log_7 (y+1)}$; c) $3^{2\log_3 x}$; d) $49^{\log_7 (y+1)}$!

126. Határozd meg az x értékét:

a) $\log_a x = \log_a 15 - \log_a 3$; b) $\log_a x = 0{,}5\log_a 64$;

c) $\log_2 x = \log_2 a + \log_2 c$; d) $\log_2 x = 2\log_2 a$!

127. Növekvők vagy csökkenők-e az alábbi függvények:
a) $y = \log_{0,3}x$; b) $y = \ln x$; c) $y = \log_2 x$; d) $y = \lg x$?

128. Állapítsd meg a következő függvények értelmezési tartományát:
a) $y = \log_3(x - 3)$; b) $y = \ln(x + 1)$; c) $y = \log_2 x^2$!

A

129. Határozd meg 1; 2; 4; 8 és 16 4-es alapú logaritmusát!

130. Számítsd ki a következő logaritmusokat: lg10; lg100; lg1000; ln$e$; lne^3!

131. Igazold az alábbi egyenlőségeket:
a) $\log_2 16 = 4$; b) $\log_5 125 = 3$; c) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$!

132. A logaritmus fogalma segítségével írd át más alakba az alábbi egyenlőségeket:
a) $5^4 = 625$; b) $9^{0,5} = 3$; c) $4^{1,5} = 8$;
d) $6^0 = 1$; e) $10^{-3} = 0,001$; f) $a^{3x} = c$!

133. A hatvány fogalma segítségével írd át más alakba az alábbi egyenlőségeket:
a) $\log_3 81 = 4$; b) $\log_2 64 = 6$; c) $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$;
d) $\log_4 x = 3$; e) $\log_5 2x = 2$; f) $\log_x 49 = 2$!

134. Igazak-e az alábbi egyenlőségek:
a) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$; b) $\log_{0,5} 4 = -2$; c) $\log_9 \sqrt{3} = 0,25$?

Határozd meg a következő kifejezések értékét (**135., 136.**)!

135. a) $5^{\log_5 4}$; b) $1,2^{\log_{1,2} 7}$; c) $0,3^{2\log_{0,3} 0,3}$;
d) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; e) $\lg 300 - \lg 3$; f) $\ln 3e - \ln 3$.

136. a) $\log_3 2 + \log_3 4,5$; b) $\log_5 4 - \log_5 0,8$;
c) $3\log_2 6 - \log_2 27$; d) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$;
e) $\frac{\lg 27 - \lg 3}{\lg 15 - \lg 5}$; f) $\frac{\ln 18 + \ln 8}{2\ln 2 + \ln 3}$.

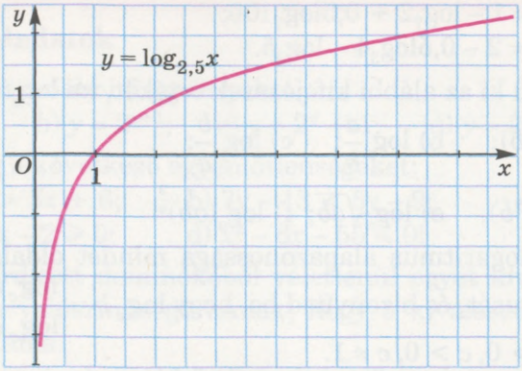
137. Töltsd ki a táblázatot, és ábrázold az $y = \log_8 x$ függvényt!

x	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = \log_8 x$						

138. A 22. ábra alapján határozd meg az $y = \log_{2,5} x$ függvény közelítő függvényértékeit az alábbi abszcisszájú pontokban:
a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; b) 0,4; 1,4; 2,5; 3,8; 6,25!

139. A 22. ábra alapján határozd azon argumentumértékeket, melyeknél az $y = \log_{2,5} x$ függvény értéke:
a) –1; –2; –3; 0; 1; 2; 3; b) –0,5; –2,2; 0,4; 1,4; 2; 2,2!

140. Illeszkedik-e az $y = \log_{\sqrt{3}} x$ függvény grafikonjára az alábbi pont:
a) $A(6; 27)$; b) $B(27; 6)$; c) $C(\sqrt{3}; 1)$?



22. ábra

141. Határozd meg az a paraméter értékét úgy, hogy az alábbi pont illeszkedjen az $y = \log_a x$ függvény grafikonjára:
a) $M(8; 3)$; b) $M(8; -3)$; c) $M(121; 2)$; d) $M(81; -4)$!

142. Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:
a) $y = \log_3 2x$; b) $y = \ln(x - 3)$;
c) $y = \log_9(x + 5)$; d) $y = \ln(1 - x)$!

143. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:
a) $\log_5 x > \log_5 3$; b) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; c) $\lg x < \lg 4$;
d) $\ln x > \ln 0{,}5$; e) $\log_3 x < 2$; f) $\log_{0,4} x > 2$!

B

144. Határozd meg az alábbi számok hármas alapú logaritmusát:
a) $\frac{1}{27}$; b) 729; c) $\sqrt[4]{9}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; e) $3^{\sqrt{3}}$!

145. A -2; $-\sqrt{3}$; -1; $-0{,}5$; 0; 0,5; 1; $\sqrt{3}$; 2 számokat írd fel olyan logaritmusként, melynek alapja az alábbi szám:
a) 5; b) 0,1; c) 11; d) 2,5; e) $\sqrt{5}$!

146. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:
a) $2^{4\log_2 3}$; b) $9^{\log_3 5}$; c) $8^{\log_2 7}$;
d) $5^{-\log_5 4}$; e) $10^{1-\lg 5}$; f) $e^{2-\ln 2}$!

Határozd meg az x értékét (**147., 148.**)!

147. a) $\log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 x$; b) $\log_5 x = \frac{1}{3}\log_5 8 - 2$;
c) $\log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 x$; d) $\log_{20} x = 1 + \log_{20} 10$.

148. a) $\log_7 x = 1 - \log_7 2 + 0{,}5\log_7 100$;
b) $\log_3 x = 2 - 0{,}5\log_3 4 - \log_3 5$.

149. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét, ha $\log_a b = 8$:
a) $\log_a(ab)$; b) $\log_a \frac{a}{b}$; c) $\log_a \frac{b}{a}$;
d) $\log_a(a^2 b)$; e) $\log_a \sqrt{ab}$; f) $\log_a (ab)^{\frac{2}{3}}$!

150. Vedd a logaritmus alapazonossága mindét oldalának c alapú logaritmusát, és bizonyítsd be, hogy $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

151. Bizonyítsd be, ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, akkor az alábbi egyenlőségek azonosságok
a) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; b) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$;
c) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; d) $\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$!

152. Viszonyítsd az alábbi számokat a nullához:
a) $\log_{0,5} 5$; b) $\log_{0,5} 0{,}1$; c) $\log_2 0{,}5$; d) $\lg 4$;
e) $\log_{25} 7$; f) $\log_{\sqrt{5}} 50$; g) $\log_{0,5} \sqrt{3}$; h) $\ln 0{,}01$!

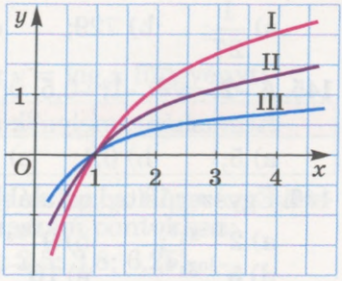
153. Hasonlítsd össze az alábbi számokat és az 1-et:
a) $\log_{49} 3$; b) $\log_2 14$; c) $\log_{98} 128$; d) $\log_2 e$!

Hasonlítsd össze (**154., 155.**)!

154. a) $\log_2 0{,}4$ és $\log_2 0{,}6$; b) $\log_2 3$ és $\log_2 \pi$;
c) $\log_{0,2} 1{,}4$ és $\log_{0,2} 4{,}1$; d) $\log_{0,5} e$ és $\log_{0,5} \pi$.

155. a) $\log_2 0{,}4$ és $\log_{0,2} 0{,}4$; b) $\log_2 3$ és $\ln 0{,}01$;
c) $\log_{0,2} 4$ és $\log_2 1{,}6$; d) $\log_{25} 0{,}7$ és $\lg 4$.

156. A 23. ábrán az $y = \ln x$, $y = \lg x$ és $y = \log_2 x$ függvények grafikonjai láthatók. Határozd meg az I., II. és III. grafikonok alapján, hogy melyik grafikonhoz melyik függvény tartozik? Ábrázold az alábbi függvényeket (lásd a 301., 302. old.):
a) $y = 3 + \lg x$; b) $y = 2\lg x$;
c) $y = \lg|x|$; d) $y = 2 + \ln x$;
e) $y = -1 + \ln x$; f) $y = |\ln x|$.



23. ábra

157. Ábrázold a következő függvényeket:
a) $y = \log_4 x$; b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$; c) $y = 2 + \log_3 x$;
d) $y = -\log_3 x$; e) $y = \log_2(x - 1)$; f) $y = \log_{0,5}(x + 2)$!

Ismétlő feladatok

158. Ábrázold az alábbi függvényeket:

a) $y = 2^x$; b) $y = 2^{x+1}$; c) $y = 2^x + 1$; d) $y = 2^{|x|}$!

159. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $8x - 3 > 5x + 6$; b) $7y - 13 < 5y - 9$;

c) $7x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$; d) $x^2 - 6x - 55 \leqslant 0$!

160. A 28 lefordított dominókőből véletlenül egyet kiválasztottak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott kövön a pontok száma:

a) 2 (A esemény); b) 5 (B esemény)?

5. §. Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

Egy egyenletet *logaritmusosnak* nevezünk, ha a változó *csak* a logaritmus alatt szerepel.

Példa: $\log_3 x = 2$; $\lg x + \lg 4 = 2$; $\ln(3x - 2) = 1 - \ln x$.

A

$$\log_a x = b, \text{ ahol } a > 0, a \neq 1$$

alakú egyenletet egyszerű logaritmusos egyenletnek nevezzük.

A logaritmus definíciója alapján bármely valós b-re ennek az egyenletnek egyetlen gyöke van: $x = a^b$.

Az összetettebb logaritmusos egyenletek megoldásánál a logaritmus fogalmát, azonosságait és a logaritmusfüggvény tulajdonságait alkalmazzuk.

A logaritmusos egyenletek megoldásakor meg kell határozni az egyenlet értelmezési tartományát, a változó megengedett értékeit vagy ellenőrizni kell, hogy a kapott értékek valóban gyökei-e az egyenletnek.

A logaritmusos egyenletek megoldására nincs általános módszer. Bár néhány típusra alkalmazhatók bizonyos módszerek. Ezeket a módszereket példák segítségével mutatjuk be.

I. *A logaritmus definíciója szerint.*

1. példa. Oldjuk meg a $\log_2(x^2 - 4x + 12) = 3$ egyenletet!

● Megoldás. A logaritmus definíciója szerint $2^3 = x^2 - 4x + 12$. Tehát $x^2 - 4x + 12 = 8$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, innen $(x - 2)^2 = 0$ és $x = 2$.

Ellenőrzés. $\log_2(2^2 - 4 \cdot 2 + 12) = \log_2 8 = 3$.

Felelet: $x = 2$.

II. *A logaritmus azonosságai és a logaritmusfüggvény tulajdonsága szerint.*

2. példa. Oldjuk meg a $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 1) = 3 + \log_2(x - 4)$ egyenletet!

● **Megoldás.** Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait: $3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3$ és $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$. Ennek alapján az eredeti egyenlet a $\log_2((x-3)(x-1)) = \log_2 2^3 \cdot (x-4)$ alakban írható fel. A logaritmusfüggvény monotonitása miatt $(x-3)(x-1) = 8(x-4)$.

Tehát $x^2 - 4x + 3 = 8x - 32$, vagyis $x^2 - 12x + 35 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Ellenőrzés. Ha $x = 5$, akkor $\log_2(5-3) + \log_2(5-1) = 3 + \log_2(5-4)$, $\log_2 2 + \log_2 4 = 3 + \log_2 1$, $1 + 2 = 3$, $3 = 3$.

Ha $x = 7$, akkor $\log_2(7-3) + \log_2(7-1) = 3 + \log_2(7-4)$, $\log_2 4 + \log_2 6 = 3 + \log_2 3$, $\log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3)$, $24 = 24$.

Felelet: $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Néhány exponenciális és logaritmusos egyenlet az $a^{f(x)} = y$ és $\log_a f(x) = y$ *helyettesítéssel* algebrai egyenletre vezethető vissza.

3. példa. Oldjuk meg a $(\lg x - 6)^{-1} + 5(\lg x + 2)^{-1} = 1$ egyenletet!

● **Megoldás.** Jelöljük $\lg x$-et y-nal. Így az

$$\frac{1}{y-6} + \frac{5}{y+2} = 1$$

egyenletet kapjuk, melynek gyökei $y_1 = 2$ és $y_2 = 8$. Tehát $\lg x_1 = 2$ vagy $\lg x_2 = 8$. Innen $x_1 = 100$ és $x_2 = 10^8$.

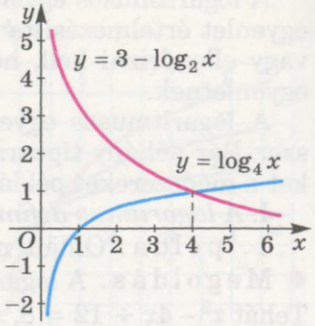
Ellenőrzéssel igazoljuk, hogy mind a két érték kielégíti az eredeti logaritmusos egyenletet.

Felelet: $x_1 = 100$; $x_2 = 10^8$.

III. Némely exponenciális és logaritmusos egyenlet *grafikusan* oldható meg.

4. példa. Oldjuk meg grafikusan a $\log_4 x = 3 - \log_2 x$ egyenletet!

● **Megoldás.** Közös koordinátarendszerben ábrázoljuk az $y = \log_4 x$ és $y = 3 - \log_2 x$ függvényeket (24. ábra). Amint látható, a függvények grafikonjai az $x = 4$ abszcisszájú pontban metszik egymást. Ahhoz, hogy meggyőződjünk, hogy az $x = 4$ érték valóban gyöke az egyenletnek, ellenőrizzük le: $\log_4 4 = 3 - \log_2 4$, $1 = 3 - 2$, $1 = 1$.



24. ábra

Felelet: $x = 4$.

Ha egy logaritmusos egyenletben az egyenlőség jelét egyenlőtlenség jelére cseréljük, akkor logaritmusos egyenlőtlenséget kapunk.

Egy egyenlőtlenséget *logaritmusosnak* nevezünk, ha a változó *csak* a logaritmus alatt szerepel.

A logaritmusos egyenlőtlenségeket ugyanazokkal a módszerekkel lehet megoldani, mint a logaritmusos egyenleteket.

Az egyszerű

$$\log_a x > b \text{ és } \log_a x < b, \text{ ahol } a > 0, a \neq 1$$

logaritmusos egyenlőtlenségek megoldása során figyelembe kell venni a logaritmusfüggvény monotonitását és értelmezési tartományát:

1) ha $a > 1$ és $\log_a x > b$, akkor $x > a^b$;
2) ha $0 < a < 1$ és $\log_a x > b$, akkor $0 < x < a^b$.

5. példa. Oldjuk meg a $\log_{0,5} x > 3$ egyenlőtlenséget!

● **Megoldás.** Mivel $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 0{,}5^3$ és az $y = \log_{0,5} x$ monoton csökken az értelmezési tartományán, a $(0; \infty)$ intervallumon, mert $0{,}5 < 1$, ezért $x < 0{,}5^3$.

Felelet: $0 < x < 0{,}125$.

6. példa. Oldjuk meg a $\lg(x - 1) + \lg(8 - x) < 1$ egyenlőtlenséget!

● **Megoldás.** Határozzuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát. Az $x - 1 > 0$ és $8 - x > 0$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza az $(1; 8)$ intervallum. Ezen a halmazon a $\lg(x-1) + \lg(8-x) < 1$ egyenlőtlenség ekvivalens az $(x-1)(8-x) < 1$ egyenlőtlenséggel. Rendezés után kapjuk az $x^2 - 9x + 18 > 0$ egyenlőtlenséget.

A kapott másodfokú egyenlőtlenség megoldása a $(-\infty; 3) \cup (6; \infty)$. Az $x \in (1; 8)$ feltétel figyelembevételével az $(1; 3) \cup (6; 8)$ megoldásra jutunk.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mely egyenleteket nevezzük logaritmusosnak?
2. Melyek az egyszerű logaritmusos egyenletek?
3. Hány megoldása van az egyszerű logaritmusos egyenletnek?
4. A logaritmusos egyenletek megoldásának mely módszereit ismered?
5. Mely egyenlőtlenségeket nevezzük logaritmusosnak?
6. Milyen módszereit ismered a logaritmusos egyenlőtlenségek megoldásának?

Közös munka

1. Oldjuk meg az $\ln(x - 8) + \ln(1 - x) = 1$ egyenletet!

● **Megoldás.** Az $\ln(x - 8)$ és $\ln(1 - x)$ kifejezéseknek akkor van értelmük, ha az $x - 8 > 0$ és $1 - x > 0$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek.

Ennek az egyenlőtlenség-rendszernek nincs megoldása.

Felelet: az egyenletnek nincs megoldása.

2. Oldjuk meg a $\log_5\log_4\log_3 x = 0$ egyenletet!

● **Megoldás.** Írjuk át az egyenletet

$$\log_5(\log_4\log_3 x) = 0 \text{ alakba!}$$

A zárójelben lévő szám a definíció szerint 5^0 egyenlő, azaz 1-gyel:

$$\log_4\log_3 x = 1.$$

Ezt az egyenletet is írjuk fel $\log_4(\log_3 x) = 1$ alakba! Innen kapjuk, hogy $\log_3 x = 4$, vagyis $x = 3^4 = 81$.

Felelet: 81.

3. Oldjuk meg a $\log^2_{0,5} x - 4 \geqslant 0$ egyenlőtlenséget!

● **Megoldás.** Vezessük be a $\log_{0,5} x = y$ jelölést! Ekkor $y^2 - 4 \geqslant 0$. Az egyenlőtlenség megoldása $y \geqslant 2$ és $y \leqslant -2$. Ha $\log_{0,5} x \geqslant 2$, akkor $\log_{0,5} x \geqslant \log_{05} 0{,}5^2$, $0 < x \leqslant 0{,}25$. Ha $\log_{0,5} x \leqslant -2$, akkor $\log_{0,5} x \leqslant \log_{0,5} 0{,}5^{-2}$, $x \geqslant 4$.

Felelet: $(0; 0{,}25] \cup [4; \infty)$.

4. Oldjuk meg a $\lg(x + 3) + \lg 2 < 2\lg x - \lg(x - 4)$ egyenlőtlenséget!

● **Megoldás.** Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $(4; \infty)$. Rendezzük az egyenlőtlenséget, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg(x + 3) + \lg 2 + \lg(x - 4) < 2\lg x,$$
$$\lg\big(2(x + 3)(x - 4)\big) < \lg x^2.$$

Ebből $2(x + 3)(x - 4) < x^2$, vagyis $x^2 - 2x - 24 < 0$. Az egyenlőtlenség megoldása a $(-4; 6)$ intervallum.

Egybevetve az egyenlőtlenség megoldását az értelmezési tartományával, kapjuk az eredeti logaritmusos egyenlőtlenség megoldását: $(-4; 6) \cap (4; \infty) = (4; 6)$.

Felelet: $(4; 6)$.

Szóbeli feladatok

Oldd meg az egyenleteket (**161–164.**)!

161. a) $\log_3 x = 1$; b) $\ln x = 1$; c) $\log_5 x = -1$.

162. a) $\lg x = 0$; b) $\log_4 x = 2$; c) $\log_7 x = -2$.

163. a) $\ln x = -1$; b) $\log_{0,1} x = -2$; c) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.

164. a) $\log_x 16 = 2$; b) $\log_x 5 = -1$; c) $\log_x 81 = -4$.

Oldd meg az egyenleteket (**165–167.**)!

165. a) $\lg x > \lg 2$; b) $\ln x < \ln 2$; c) $\lg x^2 < \lg 9$.

166. a) $\log_2 x > 2$; b) $\log_2 x < 3$; c) $\lg x < 0$.

167. a) $\log_{0,2} x > 1$; b) $\log_{0,2} x < 0$; c) $\log_{0,5} x \geqslant 2$.

A

A logaritmus definíciója szerint oldd meg az egyenleteket (**168–172.**)!

168. a) $\log_2(x-3) = 4$; b) $\lg(x+5) = 2$; c) $\ln(2-x) = -3$.

169. a) $\lg 2x = 4$; b) $\lg x^2 = 4$; c) $\lg \frac{x}{2} = 3$.

170. a) $\log_5(x-1) = 2$; b) $\log_2(x^2+3x) = 2$;
c) $\log_2(x^2-1) = 3$; d) $\log_x(x^2-2x+6) = 2$.

171. a) $\log_2(x+5) = 1$; b) $\log_2(x^2+x) = 1$;
c) $\log_3(x^2+2) = 3$; d) $\log_x(16-x^3) = 3$.

172. a) $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) = -2$; b) $\log_{16}(x^2-3x) = 0{,}5$;
c) $\log_{0,5}(3x-1) = 3$; d) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1) = -2$.

A logaritmikus azonosságok alkalmazásával oldd meg az egyenleteket (**173–176.**)!

173. a) $\lg(3x-17) = \lg(x+1)$; b) $\log_6(5x+3) = \log_6(7x+5)$;
c) $\lg(4x+5) = \lg(5x+2)$; d) $\log_2(6x-8) = \log_2(3x+1)$.

174. a) $\lg(2x^2+3x) = \lg(6x+2)$;
b) $\lg(4x+1) - \lg x = 0$;
c) $\log_3(x^2-4x-5) = \log_3(7-3x)$;
d) $\lg(x+4) - \lg(3x) = 0$.

175. a) $\lg(x-1) = \lg 2 + \lg(2x-11)$; b) $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$;
c) $\lg(3x-1) = \lg 5 + \lg(x+5)$; d) $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$.

176. a) $\log_{12}(x-3) + \log_{12}(x-2) = 1$;
b) $1 + \log_5(2x-1) = \log_5(7x+4)$;
c) $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-3)$;
d) $2\log_3 x = 1 + \log_3(2x-3)$.

Oldd meg az egyenlőtlenségeket (**177–180.**)!

177. a) $\log_2(3-2x) < \log_2 13$; b) $\log_{0,5}(1-3x) \geqslant \log_{0,5} 4$;
c) $\log_{0,7}(2x-7) > \log_{0,7} 5$; d) $\log_7(3x+8) < \log_7 5$.

178. a) $\log_2(4-x) - \log_2 8 < 0$; b) $\lg x > \lg 7 + 1$;
c) $\log_{0,25}(2-x) - \log_{0,25} 2 > 0$; d) $\lg x \leqslant 2 - \lg 5$.

179. a) $\log_3(x-7) < 3$; b) $\log_3(v+1) < -2$;
c) $\log_{\frac{1}{3}}(y-7) > -2$; d) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5z) < -2$.

180. a) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < 0$; b) $\log_{\frac{1}{4}}(3 - 4x) > -1$;
c) $\lg(12 - 5x) < 0$; d) $\log_{16}(4x + 3) > \frac{1}{2}$.

B

Oldd meg az egyenleteket (**181–183.**)!

181. a) $\log_7\log_2\log_{13}x = 0$; b) $\log_5\log_4\log_3 x = 0$.

182. a) $\log_{2008}\log_3\log_2 x = 0$; b) $\lg\lg\log_5 x = 0$.

183. a) $\lg(x + 1) - \lg(x + 3) = \lg 3 - \lg(x - 1)$;
b) $\log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 2 - \log_2(2x - 8)$.

Oldd meg változócserével az egyenleteket (**184–186.**)!

184. a) $\lg^2 x - 4\lg x + 4 = 0$; b) $\log_5 x \cdot (\log_5 x - 1) = 2$;
c) $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$; d) $\lg 10x = \frac{3}{\lg x - 1}$.

185. a) $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$; b) $\ln^2 x - 2\ln x = 3$;
c) $\frac{1}{1 + \lg z} + \frac{6}{5 + \lg z} = 1$; d) $\frac{2\lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$.

186. a) $\log_2^2(x - 1) - \log_2(x - 1) - 6 = 0$; b) $\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0$;
c) $2\log_9^2(x + 5) - 3\log_9(x + 5) + 1 = 0$; d) $\ln^2 x - 2\ln x = 0$.

Oldd meg az egyenleteket (**187., 188.**)!

187. a) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; b) $4 - \lg z = 3\sqrt{\lg z}$;
c) $\log_{0,5}\log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 0$; d) $\log_x 2 + \log_2 x = 2{,}5$.

188. a) $2\lg(-x) = \lg(x + 2)$; b) $\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x + 12)$;
c) $\log_2 x + \log_x 16 = 5$; d) $x^{2+\lg x} = 1000$.

Oldd meg az egyenlőtlenségeket (**189–193.**)!

189. a) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) > 3$;
b) $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 6) \leqslant 2$.

190. a) $\log_5(x + 13) < \log_5(x + 3) + \log_5(x - 5)$;
b) $\log_4(x + 32) \geqslant \log_4(1 - x) + \log_4(8 - x)$.

191. a) $\lg(x - 1) - \lg(2x - 11) \geqslant \lg 2$;
b) $\lg(3x - 1) - \lg(x + 5) > \lg 5$.

192. a) $\log_3^2(4 - x) < 1$; b) $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 < 0$;
c) $\log_5^2(5 - x) \leqslant 4$; d) $\log_2^2 x - 3\log_3 x - 4 > 0$.

193. a) $\log_{0,2}^2(x-1) > 4$; b) $\log_3^2 x - 2\log_3 x < 3$;

c) $\log_4^2(x-3) \geqslant 1$; d) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

194. Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

a) $\log_3 x = 1 - x$; b) $x - 1 = 3\log_4 x$;

c) $\log_2 x = \sqrt{3-x}$; d) $\log_{0,5} x = -\frac{2}{x}$!

195. Oldd meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\log_2 x < 3 - x$; b) $\ln x < x^3 + 1$;

c) $\log_4 x > \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$; d) $x < 11 - \lg x$!

196. Határozd meg az alábbi egyenletek gyökeinek közelítő értékét 10^{-4} (4 tizedesjegynyi) pontossággal:

a) $\lg x = 0{,}4$; b) $\lg x = -1{,}5$; c) $\ln x = 3{,}7$;

d) $\log_3 x = 2{,}5$; e) $\log_{0,5} x = 3$; f) $\log_{\sqrt{2}} x = \sqrt{3}$!

197. Az emberi tüdő térfogatát a

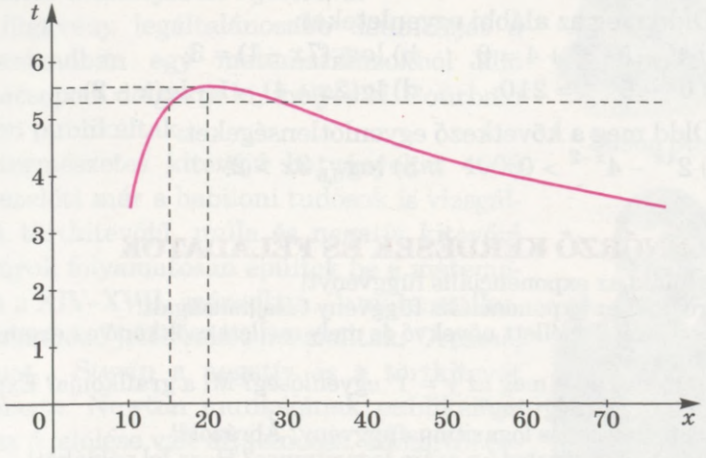
$$t(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

függvénnyel lehet kiszámítani, ahol x az életkor ($x \geqslant 10$); $t(x)$ a tüdő térfogata literben mérve.

A 25. ábrán látható grafikonról olvasd le:

a) hány évesen maximális a tüdő térfogata és mennyi ez az érték;

b) hány évig nagyobb a tüdő térfogata, mint egy 15 évesé?



25. ábra

Ismétlő feladatok

198. Egy motoros hajó a folyón lefelé 80 km-t tett meg, majd visszafordult. Az egész utat 8 óra 20 perc alatt tette meg. Hány órát haladt a motoros hajó a folyón lefelé, ha a folyó sebessége 4 km/h?

199. Ábrázold az $y = x^{\frac{1}{3}}$ és $y = \sqrt[3]{x}$ függvényt!

200. Rendezd az alábbi számokat növekvő sorrendbe:

a) $0{,}5^{0{,}5}$; $0{,}5^{-5}$; $0{,}5^{1{,}5}$; $0{,}5^{\sqrt{5}}$;

b) $3^{0{,}3}$; 3^{-5}; $3^{1{,}3}$; $3^{\sqrt{5}}$!

1. számú önálló munka

1. változat

1. Ábrázold az alábbi függvényeket: a) $y = 3^x$; b) $y = \log_{0{,}5} x$!

2. Számítsd ki: a) $\log_2 32$; b) $\log_6 2 + \log_6 3$!

3. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; b) $\log_5(2x + 3) = 2$;

c) $4^{x+1} - 4^{x-1} = 60$; d) $\lg(3x + 1) + \lg x = 1$!

4. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $3^{4x} - 9^{x+2} < 0$; b) $\log_2 4x < 3$!

2. változat

1. Ábrázold az alábbi függvényeket: a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; b) $y = \log_3 x$!

2. Számítsd ki: a) $\log_9 81$; b) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$!

3. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$; b) $\log_3(7x - 1) = 3$;

c) $6^x - 6^{x-2} = 210$; d) $\lg(2x + 4) = 1 - \lg(x - 2)$.

4. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2^{4x} - 4^{x-2} > 0$; b) $\log_{0{,}6} 3x > 2$!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Definiáld az exponenciális függvényt!
2. Sorold fel az exponenciális függvény tulajdonságait!
3. Mely feltétel mellett növekvő és mely mellett csökkenő az exponenciális függvény?
4. Függvényt ad-e meg az $y = 1^x$ egyenlőség? Mi a grafikonja? Exponenciális-e ez a függvény?
5. Mi a természetes logaritmusfüggvény? Ábrázold!
6. Hogyan értelmezhető a szám logaritmusa? Hozz fel példákat!
7. Mi a tízes alapú és a mi a természetes logaritmus?

8. Fogalmazd meg a logaritmus azonosságait!
9. Írd le a logaritmus definícióját, alapazonosságát!
10. Mi a logaritmusfüggvény?
11. Sorold fel a logaritmusfüggvény tulajdonságait!
12. Mely feltétel mellett növekvő és mely mellett csökkenő a logaritmusfüggvény?
13. Mi az inverz függvény? Hozz fel példát!
14. Mit értünk exponenciális, illetve logaritmusos egyenleten?
15. Hogyan kell megoldani az exponenciális, illetve a logaritmusos egyenletet?
16. Hogyan kell megoldani az exponenciális, illetve a logaritmusos egyenlőtlenséget?
17. Melyek a transzcendens egyenletek és egyenlőtlenségek?

Matematikatörténeti adalékok

Függvények és grafikonok. A matematikában a függvény fogalma a XVII. században jelent meg. A bevezetéséhez René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Newton munkái járultak hozzá. A *függvény* szakkifejezést elsőként Gottfried Wilhelm von Leibniz javasolta. Később a fogalmat Johann Bernoulli, Guillaune de L'Hospital, Carl Friedrich Gauss pontosította, szélesítette.



Leonhard Euler

A számfüggvények főbb tulajdonságait, úgymint paritás, periodikusság, folytonosság, differenciálhatóság Leonhard Euler (1707–1783) *Bevezetés a végtelenek analízisébe* című kétkötetes munkájában fejtette ki.

A függvény legáltalánosabb definícióját a XX. században egy matematikusokból álló munkacsoport dolgozta ki, melyet N. Bourbaki álnéven publikáltak.



Simon Stevin

A természetes kitevőjű hatványokat 4000 évvel ezelőtt már a babiloni tudósok is vizsgálták. A törtkitevőjű, nulla és negatív kitevőjű hatványok folyamatosan épültek be a matematikába a XIV–XVII. században. A matematikusok különböző jelöléseket használtak. Oresme, Chuquet, Stevin a negatív és a törtkitevőt alkalmazta. Newton munkájának publikálása után az ő jelölése vált általánossá. Ekkortól értelmezik a hatványt tetszőleges valós számra.



John Napier



William Oughtred



John Wallis

A logaritmus fogalmát a XVI. században vezették be. John Napier (1550–1617) javasolta, a számok arányának értelmezésére (a görög „λογος", *logosz*, *arány* és „αριθμος", *arithmosz*, *szám* szavak összetétele). A 10-es alapú logaritmust Henry Briggs angol matematikus vezette be. 1620-ban William Oughtred megalkotta a logarlécet, ami hosszú időre a mérnökök nélkülözhetetlen eszközévé vált.

A logaritmus – mint a hatványozás inverze – mostani értelmezéséhez közeli meghatározással először John Wallis és Johann Bernoulli munkáiban találkozhatunk. A logaritmus meghatározása és az első logaritmustáblázat összeállítása megkönnyítette a számításokat, ezért széleskörűen alkalmazták a gyakorlatban. Pierre-Somon de Laplace szerint a logaritmus meghosszabbította az összetett számításokkal foglalkozó emberek életét. Később megalkották azt a logarlécet, amely már magasabb rendű műveletek mechanikus elvégzésére is alkalmas volt.

A zsebszámológépek megjelenésével a logaritmustáblázat és a logarléc a történelem süllyesztőjébe került. De a logaritmusfüggvényt és annak inverzét, az exponenciális függvényt a mai napig alkalmazzák.

Az exponenciális függvényt és a logaritmusfüggvényt Euler tanulmányozta, „exponenciális és logaritmus mennyiségeknek" nevezte őket!

Az 1. fejezet összefoglalása

Az a^α kifejezést *hatványnak* nevezzük, ahol a a hatvány alapja, α a hatványkitevő. A racionális kitevőjű hatványt az alábbi képletekkel értelmezzük:

$$a^1 = a;\ a^0 = 1\,(a \neq 0);\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}},\ (a \in R,\ n \in N);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,(a \neq 0,\ n \in N);\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (n \in N,\ m \in Z,\ a > 0).$$

A hatványok azonosságai:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 5) $(a : b)^n = a^n : b^n$.

A valós kitevőjű hatvány közelítő értékét zsebszámológéppel vagy számítógéppel lehet meghatározni.

Az $y = a^x$ alakú egyenletet exponenciális egyenletnek nevezzük, ahol $a > 0$, $a \neq 1$.

Az exponenciális függvény tulajdonságai:

1) az $y = a^x$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza (R);

2) az $y = a^x$ függvény értékkészlete a $(0; \infty)$ intervallum;

3) ha $a > 1$, akkor az $y = a^x$ függvény növekvő, ha $0 < a < 1$, akkor csökkenő;

4) az $y = a^x$ függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus;

5) az $y = a^x$ függvény grafikonja áthalad a $(0; 1)$ ponton.

A b *szám* a *alapú logaritmusának* nevezzük azt a hatványkitevőt, melyre a-t emelve b-t kapunk.

Tehát, ha $a^x = b$, akkor $x = \log_a b$ $(b > 0, a > 0, a \neq 1)$.

A logaritmus azonosságai:

1) $\log_a 1 = 0$;

2) $\log_a a = 1$;

3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

5) $\log_a x^n = n \log_a x$;

6) $a^{\log_a b} = b$.

Az $y = \log_a x$ képlettel megadott függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük, ahol $a > 0$, $a \neq 1$.

A logaritmusfüggvény tulajdonságai:

1) az $y = \log_a x$ függvény értelmezési tartománya a $(0; \infty)$ intervallum;

2) az $y = \log_a x$ függvény értékkészlete a valós számok halmaza (R);

3) ha $a > 1$, akkor az $y = \log_a x$ függvény növekvő, ha $0 < a < 1$, akkor csökkenő;

4) az $y = \log_a x$ függvény nem páros, nem páratlan, nem periodikus;

5) az $y = \log_a x$ függvény grafikonjára illeszkedik az $(1; 0)$ pont.

Az $y = \log_a x$ és az $y = a^x$ függvények egymás inverzei, ezért grafikonjaik tükrösek az $y = x$ egyenesre.

Azokat az egyenleteket, egyenlőtlenségeket nevezzük *exponenciálisnak*, melyekben a változó a hatványkitevőben van.

Az exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek megoldási módszerei:

I. Az egyenlet mindkét oldalát azonos alapú hatványokká alakítjuk.

II. Új változó bevezetése.

III. Függvényelméleti, grafikus módszer.

Azokat az egyenleteket, egyenlőtlenségeket nevezzük *logaritmusosoknak*, melyekben a változó a logaritmus alatt van.

A logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek megoldási módszerei:

I. A definíció szerint.

II. A logaritmus azonosságai alapján.

III. Új változó bevezetésével.

IV. Grafikus módszerrel.

V. Az egyenlet mindkét oldalának azonos alapú logaritmusra hozásával.

Az exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek nem algebraiak.



Mi lehet egyszerűbb
a differenciálszámításnál?
M. Osztrohradszkij

A 2 derivált és alkalmazásai

A FEJEZET TÉMAKÖREI

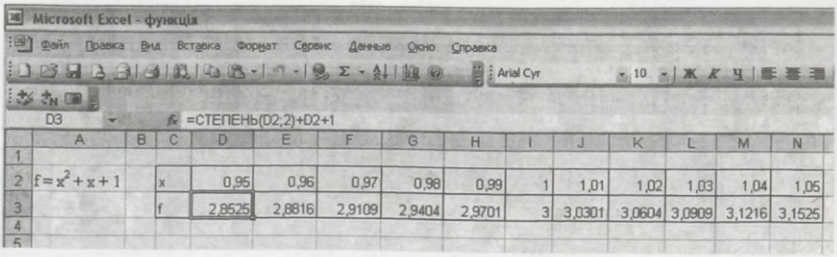
- A függvény pontbeli folytonossága és határértéke.
- A deriváltfüggvény; deriváltfüggvény fizikai és geometriai értelmezése.
- Elemi függvények deriváltjai.
- Deriválási szabályok.
- Az összetett függvény deriválása.
- A függvény monotonitásának (állandóságának, növekedésének, csökkenésének) elégséges feltétele. A függvény szélsőértékhelyei.
- A deriválás alkalmazása függvényvizsgálatkor és a grafikonok ábrázolásakor.
- A függvény adott intervallumon vett legnagyobb és legkisebb értéke.
- A deriválás alkalmazása gyakorlati problémák megoldásánál.

6. §. A függvény határértéke

Gyakran használják a függvény pontbeli helyettesítési értéke, pontbeli határértéke, pontbeli növekménye, pontbeli folytonossága kifejezéseket. Milyen pontról van szó? Az abszcisszatengely pontjáról, a függvény argumentumáról.

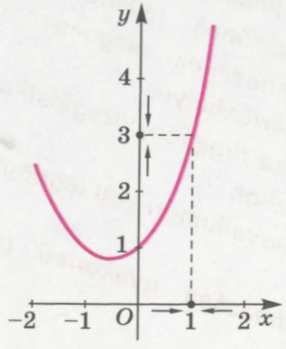
A függvény pontbeli helyettesítési értéke. Vegyük az $f(x) = x^2 + x + 1$ képlettel megadott függvényt. Az $x = 1$ argumentumértékhez az $f(x) = 3$ függvényérték tartozik. Úgy fogalmazunk, hogy az $x = 1$ pontban az $f(x)$ függvény helyettesítési értéke 3. Az $x = 0$ pontban 1, az $x = 10$ helyen pedig az $f(x)$ függvény helyettesítési értéke 111. Így írjuk: $f(1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(10) = 111$.

A függvény pontbeli határértéke. Vizsgáljuk az előbbi függvényt: $f(x) = x^2 + x + 1$. Az 1-hez mind a két oldalról elég közeli x argumentumhoz tartozó függvényértékek 3-hoz tartanak. Ezt szemlélteti a 26. ábra, ahol 10 db 1-hez közeli argumentumnál számolták ki az $f(x) = x^2 + x + 1$ függvény helyettesítési értékeit. A 27. ábrán a függvény grafikonja látható.

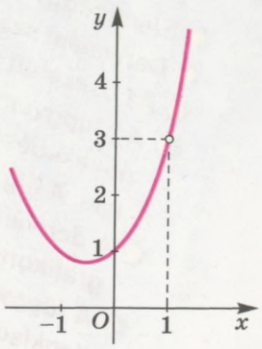


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	$f=x^2+x+1$		x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
3			f	2,8525	2,8816	2,9109	2,9404	2,9701	3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525
4														
5														

26. ábra



27. ábra



28. ábra

Másképpen úgy is fogalmazhatunk, hogyha az $|x - 1|$ különbség tetszőleges kicsiny értéke mellett az $|f(x) - 3|$ különbség is tetszőlegesen kicsiny. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke 3, ha x tart 1-hez. Így írjuk: ha $x \to 1$, akkor $f(x) \to 3$ vagy $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Fontos megjegyezni, hogy egy függvénynek létezhet határértéke olyan pontban is, amelyben nincs értelmezve. Például a $\varphi(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ függvény az $x = 1$ pontban nincs értelmezve, mivel a nevező nem lehet nulla. Az összes többi pontban a függvény helyettesítési értéke megegyezik az előbbi $f(x)$ függvény helyettesítési értékével, mivel $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$. A $\varphi(x)$ függvény grafikonja a 28. ábrán látható. Annak ellenére, hogy a $\varphi(x)$ függvény nincs értelmezve az $x = 1$ pontban, a függvény határértéke ebben a pontban 3.

A függvény határértékét így is megadhatjuk:

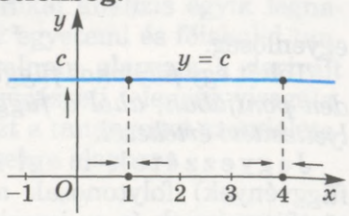
A b számot az $f(x)$ függvény $x = a$ pontbeli *határértékének* nevezzük, ha bármely tetszőlegesen kicsiny ε értékre létezik olyan pozitív δ szám, hogy bármely x értékre az $(a - \delta; a + \delta)$ intervallumból, esetleg kivéve az $x = a$ értéket, teljesül az $|f(x) - b| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Így jelöljük: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Megjegyzés. A függvény határértéke elég bonyolult fogalom, ezért nem kötelező a definíciót megjegyezni.

A függvény pontbeli határértékének tulajdonságai:

- Egy függvénynek nem lehet egy adott pontban két különböző határértéke.



29. ábra

- Ha c egy valós szám, akkor $\lim\limits_{x \to a} c = c$ (29. ábra).
- Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik határértéke az a pontban, akkor ebben a pontban létezik az $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$ és $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\big(g(x) \neq 0\big)$ függvényeknek is határértékük, melyekre teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

1) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \big(kf(x)\big) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, ha $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Az utolsó tulajdonság azt mondja ki, hogy az összegfüggvény (különbség-, szorzatfüggvény) határértéke egyenlő a függvények határértékeinek összegével (különbségével, szorzatával). A hányadosfüggvény határértéke egyenlő a határértékek hányadosával, abban az esetben, ha a nevező határértéke nem egyenlő nullával.

Ezeket a tulajdonságokat alkalmazzuk a függvények pontbeli határértékeinek meghatározásánál.

Példa. Határozd meg az $f(x)$ függvény határértékét, ha x tart 5-höz: a) $f(x) = 2x + 3$; b) $f(x) = x^2 - 10x + 17$!

● Megoldás.

a) $\lim\limits_{x\to 5}(2x+3) = \lim\limits_{x\to 5}2x + \lim\limits_{x\to 5}3 = 2\lim\limits_{x\to 5}x + 3 = 2\cdot 5 + 3 = 13;$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2 - 10x + 17) = \lim\limits_{x\to 5}x^2 + \lim\limits_{x\to 5}(-10x) + \lim\limits_{x\to 5}17 =$

$= (\lim\limits_{x\to 5}x)^2 - 10\cdot\lim\limits_{x\to 5}x + \lim\limits_{x\to 5}17 = 5^2 - 10\cdot 5 + 17 =$

$= 25 - 50 + 17 = -8.$

Megjegyzés. A hasonló példák megoldásánál némely számítás fejben is könnyen elvégezhető.

A határérték meghatározása ***folytonos függvények*** esetében leegyszerűsödik. A folytonos függvények grafikonja folytonos görbe. Ezen függvényekre teljesül a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

egyenlőség.

Tehát *egy folytonos függvény határértéke, azon intervallum minden pontjában, ahol a függvény folytonos, egyenlő a függvény helyettesítési értékével.*

Jegyezzétek meg! A racionális egészfüggvények (polinomfüggvények) folytonosak az egész számegyenesen. A racionális törtfüggvények és az irracionális függvények folytonosak az egész értelmezési tartományukon.

A függvények határértékét bővebben a matematikai analízis tárgyalja.

A függvény és az argumentum növekménye. Vegyük például az $f(x) = x^2$ függvényt. Ennek a függvénynek a helyettesítési értéke az $x = 2$ helyen $f(2) = 4$. Növeljük az argumentumot 0,01-dal, akkor $x = 2{,}01$. A megfelelő függvényérték $f(2{,}01) = 4{,}0401$. Hasonlítsuk össze a kapott értéket az előbbivel, 0,0401-del nőtt a függvény értéke. Ebben az esetben 0,01 az *argumentum növekménye*, 0,0401 a hozzá tartozó *függvény növekménye*. Úgy is fogalmazhatunk, ennyi az $f(x) = x^2$ függvény növekménye a $[2; 2{,}01]$ intervallumon.

Az $x_0 = a$ pontban az argumentum növekményének nevezzük az $x - a$ különbséget, ahol x tetszőleges szám az a szám környezetéből. Ez a különbség lehet negatív és lehet pozitív előjelű is. A hozzá tartozó függvény növekménye az $f(x) - f(a)$ különbség.

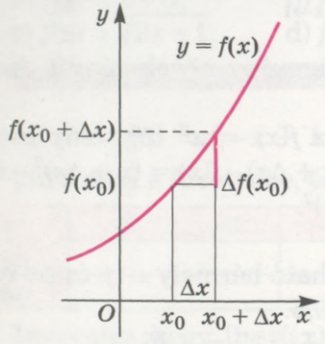
Az argumentum növekményét Δx-szel jelöljük, a függvény növekményének jelölésére a Δf, Δy szimbólumokat használjuk (olv.:

delta iksz, delta ef, delta ipszilon). Ezekkel a szimbólumokkal nem szorzatot jelölünk. Az előbbi példában $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$.

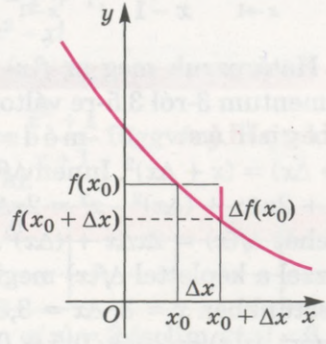
Geometriai értelmezésük: az argumentum növekménye a görbén lévő pont abszcisszájának növekménye; a függvény növekménye pedig ugyanezen pont ordinátájának növekménye (30. ábra). Ezeket a fogalmakat a 30. és 31. ábrák szemléltetik.

Ha az $y = f(x)$ függvény növekvő és $\Delta x > 0$, akkor $\Delta f(x)$ pozitív.

Ha az $y = f(x)$ függvény csökkenő és $\Delta x > 0$, akkor $\Delta f(x)$ negatív.



30. ábra



31. ábra

A határértékek vizsgálata a matematikai analízis egyik legnagyobb és legfontosabb fejezete, amely az egyetemi és főiskolai tananyag követelménye. A határérték fogalmán alapszik a derivált fogalma és annak alkalmazása, több természeti jelenség vizsgálatához szükséges elmélet. Az iskolában ezt a tananyagot szemléletesen tanítják, elképzelésekre és megérzésekre alapozva.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a függvény pontbeli határértéke?
2. Mi az argumentum növekménye? Hogyan jelöljük?
3. Mi a függvény növekménye? Hogyan jelöljük?
4. Fogalmazd meg a határérték tulajdonságait!
5. Milyen tulajdonságait ismered a függvény növekményének?

Közös munka

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket: a) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$!

● **Megoldás.** a) Az $y = \sqrt{x+1}$ függvény folytonos az $x = 3$ helyen, ezért a határérték egyenlő a függvény helyettesítési értékével ebben a pontban: $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$.

b) Az $x = 1$ pontban a függvény nincs értelmezve, viszont az $\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ tört egyszerűsíthető: $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$.

Mivel $x \to 1$ esetén a függvény határértékének kiszámítása során az $x = 1$ pontot kizárhatjuk, nem kell vizsgálnunk, ezért:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = \lim_{x\to 1}x - 2 = 1 - 2 = -1.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény növekményét, ha az argumentum 3-ról 3,5-re változik!

● **Megoldás.** 1. módszer. Az $f(x) = x^2$ függvény esetén $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Innen $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Tehát $\Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

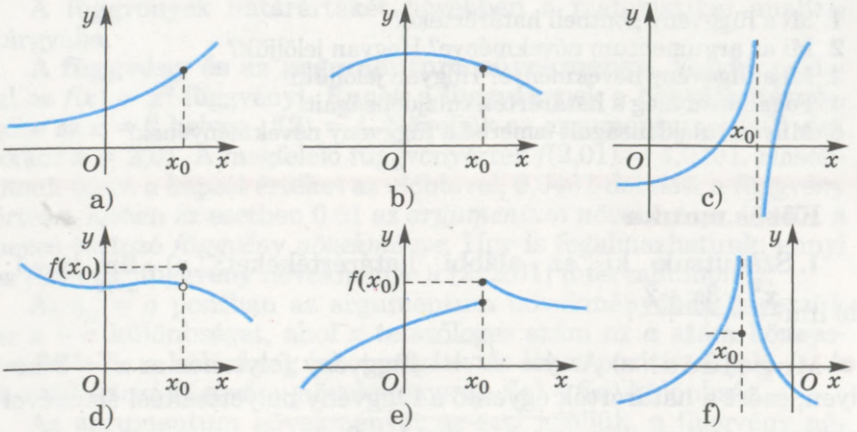
Ezzel a képlettel $\Delta f(x)$ meghatározható bármely x-re és Δx-re. A mi esetünkben $x = 3$, $\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

Ezért $\Delta f(x) = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25$.

2. módszer. $f(3) = 3^2 = 9$, $f(3{,}5) = 3{,}5^2 = 12{,}25$. Innen $\Delta f(x) = f(3{,}5) - f(3) = 12{,}25 - 9 = 3{,}25$.

Szóbeli feladatok

201. Azon függvények közül, melyek grafikonjai a 32. ábrán láthatók, melyek folytonosak: 1) az egész értelmezési tartományukon; 2) a $(-\infty; 0)$ intervallumon; 3) a $(0; \infty)$ intervallumon?



32. ábra

202. Mindegyik függvényről, melynek grafikonja a 32. ábrán látható, állapítsd meg: a) a függvény értelmezve van-e az x_0 pontban; b) létezik-e a függvénynek határértéke az x_0 pontban, és az egyenlő-e a függvény helyettesítési értékével ezen a helyen?

203. Létezik-e az $f(x) = 5x$ függvénynek határértéke az alábbi pontokban: a) $x_0 = 2$; b) $x_0 = 0$; c) $x_0 = -0{,}2$?

204. Határozd meg az $f(x)$ függvény határértékét az $x_0 = 0$ pontban, ha:
a) $f(x) = x - 5$; b) $f(x) = x^2 - x + 7$;
c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$; d) $f(x) = 3x^2 - x$!

A

205. Adott az $f(x) = x^2 - x + 1$ és $\varphi(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$ függvény. Rajzold át a táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki!

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

206. Ismeretes, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 2$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 3$.
Számítsd ki az alábbiakat:
a) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + \varphi(x) - g(x)\big)$; b) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(2f(x) - \varphi(x) + g(x)\big)$;
c) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot\varphi(x)\cdot g(x)\big)$; d) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot\varphi^2(x)\cdot g(x)\big)$!

207. Határozd meg az $y = f(x)$ függvény határértékét az $x_0 = 1$ pontban, ha:
a) $f(x) = 2x - 5$; b) $f(x) = 3x^2 - x + 1$; c) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$!

208. Határozd meg az $y = \varphi(x)$ függvény határértékét az $x_0 = 2$ pontban, ha:
a) $\varphi(x) = 3x^3 - x$; b) $\varphi(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$; c) $\varphi(x) = x^2 - 7x + 3$!

Számítsd ki a határértéket (**209–212.**)!

209. a) $\lim\limits_{x\to 10}(12x - 30)$; b) $\lim\limits_{x\to 5}(8 - 3x)$; c) $\lim\limits_{x\to 5}(2x + 0{,}5)$.

210. a) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2 - 5)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(1 - 3x^3)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}(2x + 5x^2)$.

211. a) $\lim\limits_{x\to 0}(2 + x + x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(7 - 3x^2)$; c) $\lim\limits_{x\to 3} x(x+5)$.

212. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{x^2-5}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2}{7}$.

213. Határozd meg az argumentum növekményét, ha értéke x_0-ról x-re változik:
a) $x_0 = 1$, $x = 1{,}3$; b) $x_0 = 3$, $x = 3{,}5$; c) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}7$!

214. Határozd meg az $y = 3x + 1$ függvény növekményét, ha az argumentum x_0-ról x-re változik:
a) $x_0 = 2$, $x = 2{,}3$; b) $x_0 = 5$, $x = 5{,}5$; c) $x_0 = 2{,}5$, $x = 2{,}7$!

215. Határozd meg x és Δy értékét az $y = 0{,}5x - 3$ függvényre, ha:
a) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$; b) $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}4$;
c) $x_0 = 2{,}1$, $\Delta x = 0{,}9$!

216. Határozd meg Δx és Δy értékét az $y = 10x - 1$ függvényre, ha:
a) $x_0 = 1$, $x = 1{,}2$; b) $x_0 = 3$, $x = 3{,}1$; c) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}5$!

B

217. Ismeretes, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 5$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 2$.
Számítsd ki az alábbiakat:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)+1}{g(x)-\varphi(x)}$; b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{2-5\varphi(x)}$; d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$!

Számítsd ki a határértéket (**218–220.**)!

218. a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

219. a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$; b) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$.

220. a) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$.

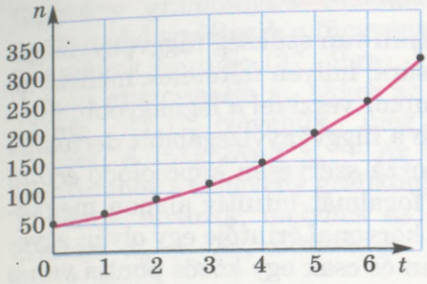
221. Határozd meg az $f(x)$ függvény határértékét abban a pontban, melyben nincs értelmezve, ha:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$; b) $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$!

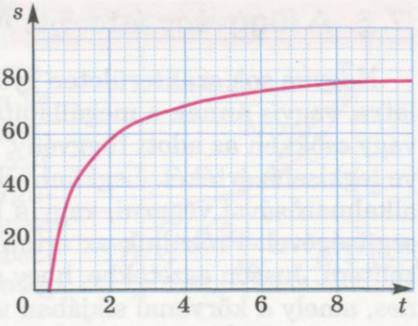
222. Határozd meg az $y = 5 + x^2$ függvény növekménye és az argumentum növekménye hányadosának határértékét, ha az argumentum növekménye nullához tart!

223. Határozd meg a függvény növekménye és az argumentum növekménye hányadosának határértékét, ha az argumentum növekménye nullához tart:
a) $f(x) = -x + 3$; b) $f(x) = 3x^2$; c) $f(x) = x^3 + 1$!

224. Heti rendszerességgel megszámolták és feljegyezték egy egérkolónia egyedszámának változását, majd a kapott adatokat grafikonon ábrázolták (33. ábra). Határozd meg a kolónia átlagos szaporulatát:
a) a 4. héttől a 6. hétig; b) az első 5 hét alatt!



33. ábra



34. ábra

225. A 34. ábrán egy test $s(t)$ út-idő grafikonja látható (az út (s) kilométerben van mérve, az idő (t) órában). Határozd meg a test átlagsebességét t óra alatt, ha: a) $1 \leqslant t \leqslant 4$; b) $4 \leqslant t \leqslant 8$!

226. Ismeretes, hogy egy bizonyos termék előállításának költségfüggvénye $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 20x + 100$ (hrn.), egy termék eladásánál a bevételt az $R(x) = 200x^2 - 0{,}05x$ (hrn.) függvény írja le. Határozd meg a költségek és a bevétel növekményét, ha növeljük az eladott termékek számát:
a) 20-ról 100 darabra; b) 30-ról 50 darabra!

227. Egy felmérésből megállapították, hogy egy cégnél havi x darab termék előállításának költségfüggvénye $K(x)$, melyet a $K(x) = 150 + 30x$ képlettel lehet meghatározni, a bevételi függvénye x ugyanilyen termék eladása után pedig $R(x) = 90x - 0{,}02x^2$ (hrn.). Ha a cég megemeli a legyártott termékek számát 300-ról 320-ra, hogyan változik a cég: a) költsége; b) bevétele; c) haszna?

Ismétlő feladatok

228. Egy téglalap hossza 20 m, szélessége 10 m. A téglalap mindegyik oldalát 10%-kal megnövelték. Mekkora az így kapott téglalap területe?

229. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
a) $|x - 1| < 2$; b) $|x + 3| > 4$; c) $2|x - 3| < 5$; d) $|2x + 3| > 5$!

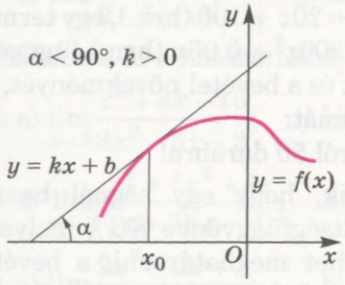
230. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

a) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; b) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x - y}$; c) $\dfrac{x + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$!

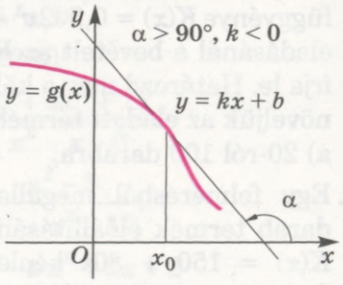
7. §. A függvény érintője. A derivált

Nagyon sok szakterületen gyakran van szükség függvényvizsgálatra, vagyis annak a megállapítására, milyen feltételek mellett nő vagy csökken az adott függvény, mikor veszi fel a legnagyobb, illetve legkisebb értékét. Legkönnyebb a függvényvizsgálatot *deriválás* alkalmazásával végezni, vagy a hozzá szervesen kapcsolódó *érintő* segítségével. Próbáljuk az érintő fogalmát intuitív alapon megközelíteni. Jusson eszetekbe, hogy a körvonal érintője egy olyan egyenes, amely a körvonal síkjában van és csak egy közös pontja van a körvonallal.

A 35. és 36. ábrán az $f(x)$ és $g(x)$ folytonos függvény grafikonja látható, melyekhez az x_0 pontba érintőt húztak. Az érintő egy egyenes, melynek az egyenlete $y = kx + b$, ahol k az egyenes *meredeksége* (*iránytangense*), $k = \text{tg}\alpha$ (ha $k \neq 0$, akkor az α szög az érintő és az x tengely pozitív iránya közötti hajlásszög).



35. ábra



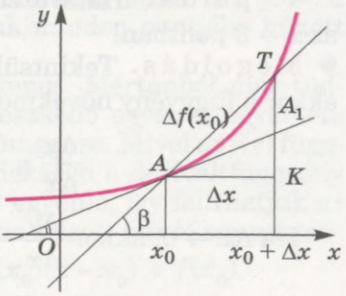
36. ábra

Figyeljétek meg az x_0 abszcisszájú pontban a függvény grafikonjához húzott érintő k meredekségét!

Ha az x_0 pont a függvény növekedésének intervallumához tartozik, akkor a hozzá tartozó k pozitív (35. ábra). Ha az x_0 pont a függvény csökkenésének intervallumához tartozik, akkor a hozzá tartozó k negatív (36. ábra). És fordítva is, ha az $(a; b)$ intervallum mindegyik x értékéhez tartozó érintő k meredeksége pozitív, akkor az adott függvény az $(a; b)$ intervallumon nő, és ha valamely $(c; d)$ intervallum bármely x értékéhez tartozó érintő k meredeksége negatív, akkor az adott függvény a $(c; d)$ intervallumon csökken. Figyelemre méltók azok a pontok is, melyekben nem létezik a függvénynek érintője, és azok is, melyekben az érintő párhuzamos az x tengellyel, vagyis ahol az érintő iránytangense 0.

Tehát a függvényvizsgálathoz célszerű ismerni a függvényhez húzott érintő meredekségét. Vizsgáljuk meg részletesebben a függvény tulajdonságai és az érintő meredeksége közötti összefüggést.

Adott az $y = f(x)$ függvény és a függvény grafikonjára illeszkedő A pont, melyben létezik a függvény grafikonjának érintője (37. ábra). Ha az A pont abszcisszája x_0, akkor az ordinátája $f(x_0)$. Növeljük meg x_0-t Δx-szel. A megnövelt $x_0 + \Delta x$ argumentumhoz a függvény grafikonjának T pontja tartozik, melynek az abszcisszája $x_0 + \Delta x$, ordinátája pedig $f(x_0 + \Delta x)$.



37. ábra

Húzzunk az A és T ponton keresztül a tengelyekkel párhuzamos AK és TK egyeneseket, melyek egy K pontban metszik egymást. Ekkor $AK = \Delta x$ az argumentum növekménye, és $TK = \Delta y$ a függvény növekménye az $[x_0; x_0 + \Delta x]$ intervallumon.

Az AT szelő meredeksége a β szög tangensével egyenlő, azaz Δy és Δx arányával:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ha az argumentum növekményét csökkentjük úgy, hogy az tartson nullához, akkor az AT szelő az A pont körül elfordul és közelít az AA_1 egyeneshez. Az AA_1 egyenest, amely $\Delta x \to 0$ esetén az AT szelő határhelyzete, a *függvény grafikonjához* az x_0 pontba húzott *érintőnek* nevezzük.

Ha $\Delta x \to 0$, akkor a β szög fokmértéke α-hoz tart, tg β pedig tg α-hoz. Tehát, ha az érintő meredeksége k és $\Delta x \to 0$, akkor

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

A mechanika, elektromosság, biológia, közgazdaság, statisztika stb. nagyon sok problémájának megoldása a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ vagy a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kifejezés értékének meghatározására vezethető vissza. Épp ezért kapott ez a kifejezés külön nevet: a *deriváltat*!

Az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *deriváltjának* nevezzük a függvény x_0 pontbeli növekménye és az argumentum növekménye arányának határértékét, amikor az argumentum növekménye nullához tart, ha ez a határérték létezik.

Az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *deriváltját* $f'(x_0)$-val jelöljük. A pontbeli deriváltat az alábbi egyenlőséggel lehet definiálni:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ vagy } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

1. példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény deriváltját az $x = 3$ pontban!

● **Megoldás.** Tekintsük az $x = 3$ argumentum Δx növekményét, ekkor a függvény növekménye $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$. Így

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$. Tehát,

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Felelet: $f'(3) = 6$.

Így számoljuk ki a függvény pontbeli deriváltját a meghatározás alapján.

Eddig a függvény pontbeli deriváltjával foglalkoztunk. De tekinthetjük a függvény deriváltját úgy is, mint függvényt. Például határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény deriváltját tetszőleges x pontban. Vegyük az x argumentum Δx növekményét, akkor a függvény növekménye $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Innen $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$. Azt kaptuk, hogy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Tehát az x^2 függvény deriváltfüggvénye tetszőleges x pontban $2x$. Így írjuk: $(x^2)' = 2x$, vagy ha $y = x^2$, akkor $y' = 2x$.

Jegyezd meg! **A függvény pontbeli deriváltja egy szám.** De ha úgy beszélnek a deriváltról, hogy nem utalnak a pontra, akkor a függvény deriváltfüggvényére gondolnak: **az $y = x^2$ függvény deriváltfüggvénye $y' = 2x$**, az $y = x^3$ függvény deriváltfüggvénye az $y' = 3x^2$ függvény.

Ezt ismerve a függvény pontbeli deriváltja könnyebben is meghatározható, mintha a definíció szerint járnánk el.

2. példa. Adott az $f(x) = x^2$ függvény. Határozd meg az $f'(3)$, $f'(0)$ és $f'(-2)$ értéket!

● **Megoldás.** $f(x) = x^2$ deriváltfüggvénye az $f'(x) = 2x$ függvény. Ezért $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Az $y = ax + b$ lineáris függvény minden x pontban deriválható és a deriváltja

$$y' = (ax + b)' = a.$$

Egyebek mellett $x' = 1$; $a' = 0$.

Jegyezzétek meg! Konstans deriváltja nulla. Az $y = a$ függvény, ahol a konstans, grafikonjának minden pontjába húzott érintő párhuzamos az x tengellyel.

Jelen esetben az érintő maga az egyenes. Mértanból már tudjuk, hogy az adott $M(x_0; y_0)$ pontra illeszkedő egyenes egyenlete $y - y_0 = k(x - x_0)$, ahol k az egyenes iránytangense. Mivel az $f(x)$ függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége a deriváltfüggvény érintési pontbeli helyettesítési értékével egyenlő, így felírhatjuk az $f(x)$ függvényhez az $(x_0; y_0)$ *érintési pontba húzott érintő egyenletét*:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ vagy } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Emlékezz rá: $f'(x_0) = k = \text{tg}\alpha$ (lásd a 35. ábrát).

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Fogalmazd meg a függvény pontbeli deriváltjának meghatározását!
2. Mi a függvény pontbeli deriváltja?
3. Mi a függvény deriváltja az adott intervallumon?
4. Mit értenek azalatt, hogy a „derivált az érintő iránytangense”?
5. Mivel egyenlő a konstans deriváltja?
6. Mit jelent az $(ax + c)' = a$ egyenlőség? Mi a mértani értelmezése?

Közös munka

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely valós k számra és x argumentumra $(kx^2)' = 2kx$!

● **Bizonyítás**. Növeljük az x argumentumot a Δx növekménnyel. Ennek megfelelően a kx^2 függvény növekménye $k(x + \Delta x)^2 - kx^2$. Egyszerűsítsük le ezt a kifejezést: $k(x + \Delta x)^2 - kx^2 = k(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2) = k\Delta x(2x + \Delta x)$.

Tehát $(kx^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(2x + \Delta x) = 2kx.$

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely nullától különböző x értékre $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$!

● **Bizonyítás**. Növeljük az x argumentumot a Δx növekménnyel. A megfelelő függvénynövekmény:

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}.$$

Ezért $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x \cdot \Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\dfrac{1}{x^2}.$

3. Bizonyítsuk be, hogy az $y = x^3$ függvény deriváltfüggvénye $y' = 3x^2$!

● **Bizonyítás.** $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$. Ez viszont azt jelenti, hogy az $y = x^3$ függvény deriváltfüggvénye $y' = 3x^2$.

4. Írjuk le az $y = x^2$ függvény grafikonja $x = 5$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének egyenletét!

● **Megoldás.** Írjuk le az érintő egyenletét:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Határozzuk meg az $f'(x)$, $f'(x_0)$ és $f(x_0)$ kifejezéseket:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x; f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10; f(x_0) = 5^2 = 25.$$

A kapott értékeket helyettesítsük be az érintő egyenletébe. Azt kapjuk, hogy:

$$y = 10(x - 5) + 25, \text{ vagy } y = 10x - 25.$$

Felelet: $y = 10x - 25$.

Szóbeli feladatok

231. Nevezd meg az alábbi egyenletekkel megadott egyenesek iránytangensét:

a) $y = 2x$; b) $y = -x + 3$; c) $y = 2 + 0{,}5x$; d) $y = 2$!

232. Határozd meg az $y = 2x + 5$ függvény deriváltját a következő pontokban:

a) $x = 2$; b) $x = 0$; c) $x = 10$; d) $x = 100$!

233. Határozd meg az $y = 2x^2$ függvény deriváltját a következő pontokban:

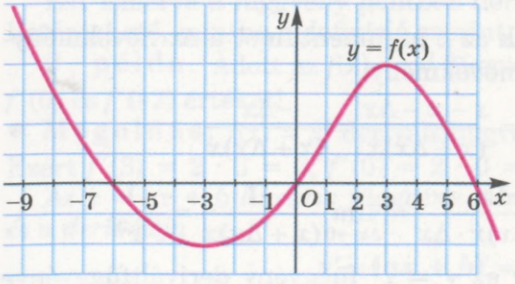
a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = 10$; d) $x = -10$!

234. Mi az alábbi függvények deriváltfüggvénye:

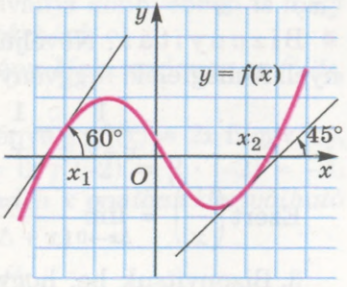
a) $y = 5$; b) $y = x$; c) $y = x^2$; d) $y = x^3$?

A

235. Nevezd meg az $f(x)$ függvény (38. ábra) néhány pontját, melyben a grafikonhoz húzott érintő meredeksége: a) pozitív; b) negatív!



38. ábra



39. ábra

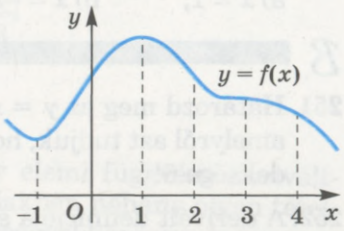
236. Nevezd meg az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának (38. ábra) olyan intervallumát, melyen a grafikonhoz húzott érintő meredeksége:
a) pozitív; b) negatív!

237. Milyen a $\varphi(x)$ függvény (39. ábra) grafikonjának x_1 és x_2 pontjaiba húzott érintők meredeksége?

238. A $\varphi(x)$ függvény (39. ábra) grafikonjának valamely pontjába húzott érintő meredeksége k. Létezik-e olyan pont, melyben: a) $k < 0$; b) $k = 0$?

239. Határozd meg az alábbi abszcisszájú pontokba húzott érintők meredekségének előjelét (40. ábra): –0,5; 0,5; 1,5; 2,5!

240. Az $y = f(x)$ függvény grafikonjáról (40. ábra) határozd meg az x pontba húzott érintő iránytangensének közelítő értékét, ha $x = -1; 0; 1; 2; 3; 4$!



40. ábra

241. Határozd meg az alábbi egyenletekkel megadott egyenesek iránytangensét:
a) $y - x + 5 = 0$; b) $x + 2y + 3 = 0$; c) $3x - 5y = 1$!

242. A $(-3; 5)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényhez húzott érintő meredeksége pozitív, ha az érintési pont abszcisszája eleme a $(-3; 2)$ intervallumnak, és negatív a $(2; 5)$ intervallum minden pontjában. Határozd meg a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait!

243. Határozd meg az $y = 5x$ függvény deriváltját az $x = 2$ pontban; tetszőleges x pontban!

244. Határozd meg az $y = 3x + 5$ függvény deriváltját az $x = 4$ pontban; tetszőleges x pontban!

245. Felhasználva az $(x^2)' = 2x$ egyenlőséget, számítsd ki az $y = x^2$ függvény deriváltját az alábbi helyeken:
a) $x = -2$; b) $x = 3$; c) $x = 10$; d) $x = -2{,}5$!

246. Ábrázold az $y = 2x^2$ függvény grafikonját, és húzz érintőt a függvény x_0 abszcisszájú pontjához! A rajz segítségével határozd meg az érintő iránytangensének előjelét, ha: a) $x_0 = -2$; b) $x_0 = 1$! A $(kx^2)' = 2kx$ képlet alapján határozd meg az $y = 2x^2$ függvény grafikonjához a megadott pontokban húzott érintők iránytangensét!

247. Határozd meg az előző feladat alapján az $f(x)$ függvény $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$ pontbeli deriváltját, ha:
a) $f(x) = 2x^2$; b) $f(x) = 0{,}5x^2$; c) $f(x) = 3x^2$!

248. Határozd meg az $y = x^3$ függvény deriváltjait az alábbi pontokban, ha tudjuk, hogy $(x^3)' = 3x^2$:
a) $x = 1$; b) $x = 5$; c) $x = 10$; d) $x = -1{,}5$!

249. Határozd meg az $y = x^2$ függvény grafikonja megadott pontbeli érintőjének iránytangensét:
a) $x = 2{,}5$; b) $x = -2{,}5$; c) $x = \sqrt{5}$!

250. Írd le az $y = x^3$ függvény grafikonjához az alábbi pontokba húzott érintők egyenletét:
a) $x = 1$; b) $x = -2$; c) $x = 0$!

B

251. Határozd meg az $y = x^2$ függvény grafikonjának azt a pontját, amelyről azt tudjuk, hogy az abba a pontba húzott érintő meredeksége 6!

252. A derivált definíciója alapján igazold, hogy az $y = \sqrt{x}$ függvény deriváltfüggvénye az $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ függvény!

253. Az előző feladat alapján határozd meg az $y = \sqrt{x}$ függvény pontbeli deriváltját, ha:
a) $x = 1$; b) $x = 4$; c) $x = 36$; d) $x = 625$!

254. A 2. feladat (61. old.) alapján határozd meg az $y = \frac{1}{x}$ függvény deriváltját az alábbi pontban:
a) $x = 1$; b) $x = -4$; c) $x = 5$; d) $x = 10$!

255. Az alábbi táblázat néhány elemi függvény deriváltfüggvényét ábrázolja. Másold át a füzetedbe, és tanuld meg!

$$a' = 0;\ x' = 1;$$
$$(ax + b)' = a;$$
$$(x^2)' = 2x;\ (x^3)' = 3x^2;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

256. Bizonyítsd be, hogy az alábbi függvények deriváltfüggvényei az értelmezési tartomány minden argumentumértékére nemnegatív értéket vesznek fel:
a) $y = 3x - 7$; b) $y = x^3 + 1$; c) $y = \sqrt{x}$!

257. Írd le az $y = \frac{6}{x}$ függvény grafikonjához az alábbi pontokba húzott érintők egyenletét:
a) $x = -1$; b) $x = -2$; c) $x = 3$; d) $x = 6$!

Ismétlő feladatok

258. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2 - 6x = 0$; b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$!

259. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

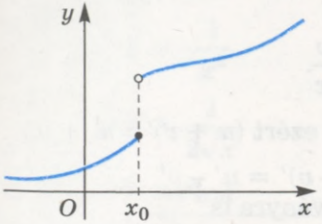
a) $(1 - \text{tg}^2 x)\cos^2 x$; b) $(\text{ctg}x + \text{tg}x)\sin 2x$!

260. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezéseket:

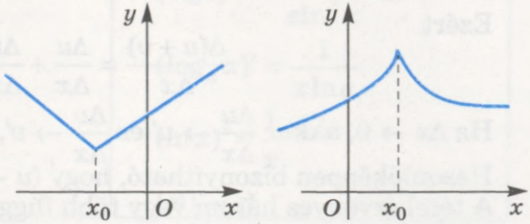
a) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ és $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ és $-\frac{3}{\sqrt{3}}$!

8. §. Deriválás, differenciálás

Már meg tudjátok határozni néhány elemi függvény deriváltfüggvényét a definíció szerint. A továbbiakban néhány olyan tétellel fogunk megismerkedni, melyek segítségével könnyen és gyorsan ki lehet számolni a függvények deriváltjait. Bár nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy nem minden pontban létezik derivált. Például nem létezik a függvényeknek deriváltja a szakadási helyeken (41. ábra), a töréspontokban (42. ábra), az értelmezési tartomány végpontjaiban. Mi csak olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, melyek grafikonjai töréspontok nélküli folytonos görbék.



41. ábra



42. ábra

Azt az eljárást, mellyel meghatározzuk egy függvény deriváltfüggvényét, *deriválásnak* nevezzük. Ha egy függvénynek létezik deriváltja egy pontban (adott intervallum minden pontjában), akkor a függvény *differenciálható* az adott pontban (az adott intervallumon). Minden polinomfüggvény és a $\sin x$, $\cos x$ függvények differenciálhatók az értelmezési tartományuk minden pontjában, azaz a valós számok R halmazán.

Az első tétel igazolásához az alábbi azonosságot alkalmazzuk:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Az azonosság könnyen igazolható, ha a jobb oldalon elvégezzük a többtagú kifejezések szorzását.

1. tétel (egytagú kifejezés deriváltja). ***Bármely természetes n és valós k számra, minden x pontban teljesül az alábbi egyenlőség***

$$(kx^n)' = kn \cdot x^{n-1}.$$

● **Bizonyítás**. Tekintsük az x pont Δx növekményét. A neki megfelelő függvénynövekmény $k(x + \Delta x)^n - kx^n$.

Így a keresett derivált a definíció szerint

$$(kx^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x + \Delta x)^n - kx^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k((x + \Delta x)^n - x^n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x + \Delta x - x)((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \ldots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} k((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \ldots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}) =$$

$$= k(x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \ldots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) = kn \cdot x^{n-1}.$$

Példák. $(5x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$; $(-2x^4)' = -2 \cdot 4 \cdot x^3 = -8x^3$.

2. tétel (összeg deriváltja). ***Ha az u és v függvények differenciálhatók az x pontban, akkor ebben a pontban*** $(u + v)' = u' + v'$.

● **Bizonyítás**. Határozzuk meg az összegfüggvény $\Delta(u + v)$ növekményét az $[x; x + \Delta x]$ intervallumon:

$$\Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) =$$
$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Ezért

$$\frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ és $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, ezért $(u + v)' = u' + v'$.

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy $(u - v)' = u' - v'$.

A tétel érvényes három vagy több függvényre is.

Például:

$(u + v - w)' = ((u + v) - w)' = (u + v)' - w' = u' + v' - w'$.

3. tétel (szorzat deriváltja). ***Ha az u és v függvények differenciálhatók az x pontban, akkor ebben a pontban*** $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

● **Bizonyítás**. Határozzuk meg a szorzatfüggvény $\Delta(uv)$ növekményét az $[x; x + \Delta x]$ intervallumon, figyelembe véve, hogy $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$ és $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$:

$$\Delta(uv) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = (u(x) + \Delta u)(v(x) +$$
$$+ \Delta v) - u(x) \cdot v(x) = \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Ezért

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u \cdot v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}.$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \to 0$, mivel $\Delta v \to 0$.

Tehát,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Következmény. *A konstans tényező kiemelhető a deriválás jelé elé.* Ha $u = C$, ahol C konstans tényező, akkor $u' = 0$ és a szorzat deriválási szabálya szerint $(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'$, vagyis $(Cv)' = Cv'$.

4. tétel (hányados deriváltja). ***Ha u és v az x pontban differenciálható függvény és ebben a pontban v ≠ 0, akkor ebben a pontban***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

A definíció alapján több más függvény deriváltfüggvénye is levezethető. Ezeket táblázatba foglaltuk.

Elemi függvények deriváltjai

$c' = 0$, c – const	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(ax + b)' = a$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	

A táblázatban szereplő képleteket már a XVII. században levezették. Ti is megpróbálhatjátok önállóan kiszámolni őket.

Konkrét példákon mutatjuk meg, hogyan lehet a képleteket alkalmazni.

1. példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^5 \cdot \sin x$ függvény deriváltfüggvényét!

● **Megoldás.** $f'(x) = (x^5 \cdot \sin x)' = (x^5)' \sin x + x^5 (\sin x)' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x$.

2. példa. Bizonyítsuk be, hogy $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

● **Bizonyítás.**

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. példa. Határozzuk meg az $y = 5x + \ln x$ függvény deriváltját!

● **Megoldás.** $y' = (5x + \ln x)' = (5x)' + (\ln x)' = 5 + \frac{1}{x}$.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a deriválás, differenciálás?
2. Mondd ki, és igazold az összegfüggvény deriváltfüggvényéről szóló tételt!
3. Hogyan kell szorzatfüggvényt deriválni?
4. Hogyan kell törtfüggvényt deriválni?
5. Mi a természetes kitevőjű hatványfüggvény deriváltfüggvénye?
6. Hogyan kell a trigonometrikus függvényeket deriválni?
7. Mi az $y = \log_a x$ függvény deriváltfüggvénye?
8. Mi az $y = a^x$ függvény deriváltfüggvénye?

Közös munka

1. Határozzuk meg az $f(x) = 3x^5 \cdot (1 - x^2)$ függvény deriváltfüggvényét!

● **Megoldás.** 1. módszer. Alkalmazzuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$f'(x) = \left(3x^5(1-x^2)\right)' = (3x^5)' \cdot (1-x^2) + 3x^5 \cdot (1-x^2)' =$$
$$= 15x^4(1-x^2) + 3x^5(-2x) = 15x^4 - 15x^6 - 6x^6 = 15x^4 - 21x^6.$$

2. módszer. Először bontsuk fel a zárójelet, majd alkalmazzuk az összegre vonatkozó deriválási szabályt.

$$f'(x) = \left(3x^5(1-x^2)\right)' = (3x^5 - 3x^7)' = 15x^4 - 21x^6.$$

2. Számítsuk ki az $f(x) = \frac{x+12}{3x}$ függvény deriváltfüggvényének helyettesítési értékét az $x_0 = 4$ pontban!

● **Megoldás.**

$$f'(x) = \left(\frac{x+12}{3x}\right)' = \frac{(x+12)' \cdot 3x - (x+12)(3x)'}{9x^2} =$$
$$= \frac{1 \cdot 3x - (x+12) \cdot 3}{9x^2} = \frac{3x - 3x - 36}{9x^2} = -\frac{4}{x^2}; \; f'(4) = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

3. Számítsuk ki az $y = 3\sin x + 5\cos x$ függvény deriváltfüggvényének helyettesítési értékét az $x_0 = \frac{\pi}{4}$ pontban!

● **Megoldás.** Alkalmazzuk az összegre vonatkozó deriválási szabályt:

$$y' = (3\sin x + 5\cos x)' = (3\sin x)' + (5\cos x)' = 3(\sin x)' + 5(\cos x)' =$$
$$= 3\cos x - 5\sin x.$$

Ha $x_0 = \frac{\pi}{4}$, akkor

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} - 5\sin\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

4. Írjuk le az $y = x^4 + x^2$ függvény grafikonja $x_0 = 2$ pontbeli érintőjének egyenletét!

● **Megoldás.** Az érintő egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Számítsuk ki az $f(-2)$ és $f'(-2)$ értékeket:

$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$;

$f'(x) = (x^4 + x^2)' = 4x^3 + 2x$; $f'(-2) = 4(-2)^3 + 2(-2) = -36$.

Tehát $y = -36(x + 2) + 20$ vagyis $y = -36x - 52$.

Szóbeli feladatok

Határozd meg a függvény deriváltját (**261–264.**)!

261. a) $y = x^{10}$; b) $y = x^{17}$; c) $y = 2x^5$; d) $y = 0{,}1x^{10}$.

262. a) $y = 2\sin x$; b) $y = 1 + \cos x$; c) $y = 4\operatorname{tg} x$; d) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

263. a) $y = 2e^x$; b) $y = e^x + 5$; c) $y = e$; d) $y = -e^x$.

264. a) $y = 3^x$; b) $y = 5\ln x$; c) $y = -\lg x$; d) $y = x^{-2}$.

265. Számítsd ki az $y = f(x)$ függvény deriváltját az x_0 pontban:
a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2\pi$!

266. Igaz-e, hogy az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltfüggvénye csak negatív értéket vesz fel? És az $y = \cos x$ függvényé?

A

Deriváld a következő függvényeket (**267–270.**)!

267. a) $f(x) = 5x^4$; b) $f(x) = 0{,}8x^5$; c) $f(x) = \frac{1}{3}x^6$;
d) $f(x) = -x$; e) $f(x) = -2x^9$; f) $f(x) = -0{,}3x^5$.

268. a) $f(x) = x^2 + 3$; b) $f(x) = 7 - x^3$;
c) $f(x) = x^4 + 9x^2$; d) $f(x) = 3x^4 - x^8$.

269. a) $f(x) = 2(x^3 - 7)$; b) $f(x) = 0{,}2(5 - 3x^4)$;
c) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{3}$; d) $f(x) = \frac{40 - 3x^5}{5}$.

270. a) $y = 3x^2 - 5x + 7$; b) $y = 2 - 3x - 8x^2$;
c) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$; d) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

Határozd meg a függvény pontbeli deriváltját (**271–273.**)!

271. $f(x) = x^2 - 5x$, $x = 1$; $x = 0$; $x = -2$.

272. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \sqrt{2}$.

273. $f(x) = -8x + 3$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \pi$.

Add meg a függvény deriváltfüggvényét (**274., 275.**)!

274. a) $y = 2\sin x + 1$; b) $y = 3\cos x + 2$; c) $y = 4\operatorname{tg} x - 3$;
d) $y = \sin x + 2x$; e) $y = \cos x + 3x$; f) $y = \operatorname{tg} x + 4x$.

275. a) $y = x^2 + \cos x$; b) $y = x^4 - \sin x$; c) $y = x^5 + \operatorname{tg} x$;
d) $y = \sqrt{x} + \operatorname{ctg} x$; e) $y = \sqrt{x} - \sin x$; f) $y = \sqrt{x} + \cos x$.

Számítsd ki a függvény deriváltját az adott pontban (**276., 277.**)!

276. a) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; b) $y = 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

277. a) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; b) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Határozd meg a függvény deriváltját (**278–280.**)!

278. a) $y = 7e^x$; b) $y = 3^x$; c) $y = \pi^x$;
d) $y = (\sqrt{2})^x$; e) $y = 4^x - x$; f) $y = 0{,}5^x + 1$.

279. a) $y = 8\ln x$; b) $y = -\ln x$; c) $y = \lg x$;
d) $y = \log_2 x$; e) $y = 2\lg x$; f) $y = 3 - \lg x$.

280. a) $y = x^{2,5}$; b) $y = -x^{0,5}$; c) $y = 2x^{1,7}$; d) $y = -x^e$.

Deriváld kétféleképpen a függvényeket (**281–283.**)!

281. a) $y = x^2(x^3 - 5)$; b) $y = x^3(3x^2 - 1)$;
c) $y = (x - 2)(x + 3)$; d) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.

282. a) $y = 3x^2(5 - x^3)$; b) $y = -7x(x^2 - 4)$;
c) $y = 5(x + 3)^2$; d) $y = (2x - 7)^2$.

283. a) $f(x) = (x^4 - 2)x^3$; b) $f(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;
c) $f(x) = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)$; d) $f(x) = (x - 1)^3 - x + 1$.

284. Töltsd ki a *Differenciálási szabályok* táblázatot!

Függvény	Deriváltfüggvény
$f(x) + \varphi(x)$	
$C \cdot f(x)$	
$f(x) \cdot \varphi(x)$	
$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$	

285. Töltsd ki az *Elemi függvények deriváltjai* táblázatot!

$f(x)$	C	x	x^2	x^n	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$									

B

Írd le a függvény grafikonjához az x_0 abszcisszájú pontba húzott érintő egyenletét (**286–288.**)!

286. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$.

287. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 0$; $x_0 = -4$.

288. $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$.

Add meg a függvény deriváltfüggvényét (**289., 290.**)!

289. a) $f(x) = x^3\cos x$; b) $f(x) = (2x - 1)\sin x$.

290. a) $f(x) = x^3\sin x$; b) $f(x) = \sin x\cos x$.

Deriváld a függvényeket két módszerrel is (**291., 292.**)!

291. a) $y = (1 - x)\sin x$; b) $y = (x + 3)\cos x$; c) $y = x(2 + \operatorname{ctg} x)$.

292. a) $y = (x^2 + 1)\cos x$; b) $y = (\sqrt{x} - 1)\sin x$; c) $y = \sqrt{x}(\operatorname{tg} x - 3)$.

Számítsd ki (**293–295.**)!

293. $f'(0{,}5\pi)$, ha: a) $f(x) = x^2 + x + \sin x$; b) $f(x) = x + x^2\sin x$.

294. $f'(\pi)$, ha: a) $f(x) = 1 + x + \cos x$; b) $f(x) = x(1 + \cos x)$.

295. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, ha: a) $f(x) = x\cos x + \frac{x^2}{\pi}$; b) $f(x) = \frac{x}{\cos x} - \frac{x^2}{3}$.

Határozd meg a szorzatfüggvény deriváltját (**296., 297.**)!

296. a) $y = x \cdot \sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$; c) $y = x^5 \cdot e^x$.

297. a) $y = e^x \cdot 2x$; b) $y = x^6 \cdot \ln x$; c) $y = 2^x \cdot \cos x$.

Határozd meg a törtfüggvény deriváltját (**298., 299.**)!

298. a) $y = \frac{2}{x+1}$; b) $y = \frac{x-3}{x}$;

c) $y = \frac{\cos x}{5x}$; d) $y = \frac{x^2}{5-x}$.

299. a) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x - 3}$; b) $f(x) = \frac{5\sin x}{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$; d) $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$.

Számítsd ki a függvény deriváltját az $x_0 = 1$ helyen (**300–302.**)!

300. a) $y = e^x + x^e$; b) $y = x^2 + \ln x$; c) $y = x - \log_2 x$.

301. a) $f(x) = xe^x$; b) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$; c) $f(x) = e^x + \ln x$.

302. a) $f(x) = x\ln x$; b) $f(x) = 2^x + \ln x$; c) $f(x) = x^{-1} + \ln x$.

Írd le az $f(x)$ függvény grafikonjához az x_0 abszcisszájú pontba húzott érintő egyenletét (**303., 304.**)!

303. a) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

304. a) $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$; b) $f(x) = \log_2 x$, $x_0 = 2$.

305. Deriváld az alábbi függvényeket:

a) $y = \sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x$; b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

c) $y = \sin 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x$; d) $y = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$!

Írd le a függvény grafikonjához az x_0 abszcisszájú pontba húzott érintő egyenletét (**306., 307.**)!

306. a) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; b) $y = 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

307. a) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; b) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Ismétlő feladatok

308. Ábrázold az alábbi függvényeket:

a) $y = x^2$; b) $y = -2x^2$; c) $y = 2 + x^2$!

309. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

a) $\cos 3x - \cos 5x$; b) $\sin 10x - \sin 6x$!

310. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $2^{3x+1} = 4^x$; b) $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = 16$!

9. §. Az összetett függvény deriváltja

Eddig csak olyan függvények deriválásával foglalkoztunk, melyek argumentuma az x változó, mint például $y = x^n$, $y = \sin x$. De hogyan kell meghatározni az $y = (2x + 1)^{10}$ és $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ függvény deriváltfüggvényét? Mindkét függvényre tekinthetünk úgy, mint az $y = f(u)$ és $u = h(x)$ függvények kompozíciójára (egymásba ágyazódásaként), vagyis $y = f(h(x))$. Az ilyen függvényeket *összetett* függvénynek nevezzük, ahol $u = h(x)$ a belső függvény, $y = f(u)$ a külső függvény.

Az $y = f(u)$ függvényben az u változó az argumentum, így le tudjuk deriválni u szerint. Erre a műveletre használjuk az y'_u jelölést. Az x szerinti deriválásra, mint eddig is, használjuk az y' és u' jelöléseket.

Tekintsük az $y = f(u)$ függvényt, ahol $u = h(x)$. Ha létezik az u függvény u' deriváltja valamely x pontban és az y függvény y'_u deriváltja a megfelelő u pontban, akkor létezik az y' derivált is, méghozzá $y' = y'_u \cdot u'$.

A tétel szigorú bizonyítása nehézkes, ezért csak a bizonyítás vázát tekintjük át. Az y' derivált a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ arány határértéke, ha $\Delta x \to 0$. Figyelembe véve, hogy $\Delta u \neq 0$, szorozzuk meg a tört számlálóját és nevezőjét is Δu -val:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\Delta u \to 0$, merthogy az $u = h(x)$ függvény differenciálható az x pontban. Ezért ha $\Delta x \to 0$, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$$

és a (*) egyenlőségből kapjuk a bizonyítandó láncszabályt: $y' = y'_u \cdot u'$.

Eddig az y' deriváltfüggvényt egy adott pontban vizsgáltuk, de ha az $y = f(h(x))$ összetett függvény differenciálható egy adott intervallum minden pontjában, akkor az $y' = y'_u \cdot u'$ egyenlőség teljesül az egész intervallumon. Tehát ezzel a képlettel meghatározható a függvény deriváltfüggvénye az adott intervallumon.

1. példa. Határozd meg az $y = (2x + 1)^{10}$ függvény deriváltfüggvényét!

● **Megoldás.** Ez a függvény felírható $y = u^{10}$ alakban, ahol $u = 2x + 1$. Ezek a függvények differenciálhatók R-en, ezért $y'_u = 10u^9$, $u' = 2$.

Így $y' = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x + 1)^9$.

Nem feltétlenül szükséges az u függvényt bevezetni, elegendő figyelembe venni és rögtön az eredményt felírni a láncszabály szerint, például:

$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$;

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Ha egy függvény hozzárendelési szabálya egy bonyolult kifejezés logaritmusa, akkor célszerű először a logaritmus azonosságait alkalmazni.

2. példa. Határozd meg az alábbi függvény deriváltját

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right).$$

● **Megoldás.** $\ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right) = \ln x^2 - \ln\big((x+2)(x-3)\big) =$

$= 2\ln x - \ln(x+2) - \ln(x-3)$. Tehát,

$$y' = \big(2\ln x - \ln(x+2) - \ln(x-3)\big)' = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}.$$

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi az összetett függvény? Hozz fel példákat!
2. Hogyan kell az összetett függvényt deriválni? Hozz fel példákat!

Közös munka

1. Írjuk le az $f(g(x))$ összetett függvényt, ha:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$; b) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 1$!

● **Megoldás.** a) A feltételek szerint $f(x) = \sqrt{x}$ a külső függvény, $g(x) = \sin x$ a belső függvény. Tehát a külső függvény argumentumának a $g(x) = \sin x$ függvénynek kell lennie, vagyis a $\sqrt{x}$ kifejezésbe x helyére $\sin x$-et kell írni. Innen $f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$.

b) A feltételek szerint $f(x) = \ln x$ a külső függvény, $g(x) = x^2 + 1$ a belső függvény. Tehát az $f(x) = \ln x$ függvény argumentumának a $g(x) = x^2 + 1$ függvénynek kell lennie, vagyis az $\ln x$ kifejezésbe x helyére az $x^2 + 1$ kifejezést kell helyettesíteni. Innen kapjuk, hogy $f(g(x)) = \ln(x^2 + 1)$.

2. Határozzuk meg y' értékét, ha $y = \cos(x^2 - 1)$!

● **Megoldás.** $y' = (\cos(x^2 - 1))' = -\sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x = -2x\sin(x^2 - 1)$.

3. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x^3 + x^2}$ függvény deriváltfüggvényének helyettesítési értékét az $x = 3$ helyen!

● **Megoldás.** $y' = (\sqrt{x^3 + x^2})' = \dfrac{(x^3 + x^2)'}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}}$.

Ha $x = 3$, akkor $y' = 2{,}75$.

Szóbeli feladatok

311. Írd le az $f(g(x))$ összetett függvényt, ha:

a) $f(x) = x^3$ és $g(x) = \operatorname{tg} x$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x$ és $g(x) = x^3$;

c) $f(x) = 2x - 1$ és $g(x) = \operatorname{ctg} x$; d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ és $g(x) = 2x - 1$!

312. Nevezd meg az $f(x)$ és $g(x)$ függvényt, ha:

a) $f(g(x)) = \sin(x^2 - 5)$; b) $f(g(x)) = \sqrt{1 - x^3}$;

c) $f(g(x)) = (\operatorname{tg} x + 1)^5$!

313. Mik az alábbi függvények deriváltfüggvényei:

a) $y = \sin 3x$; b) $y = \cos 5x$; c) $y = \operatorname{tg}(-5x)$;

d) $y = \sin(1-x)$; e) $y = \cos(2+x)$; f) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$;

g) $y = 3^{2x}$; h) $y = \ln^2$; i) $y = e^{-x+3}$?

A

Írd le az $f(x)$ és $g(x)$ függvény kompozícióját, az $f(g(x))$ összetett függvényt (**314., 315.**)!

314. a) $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2x + 7$; b) $f(x) = 2x + 7$ és $g(x) = x^2$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 3 - 4x$; d) $f(x) = 3 - 4x$ és $g(x) = \sqrt{x}$.

315. a) $f(x) = \frac{2}{x}$ és $g(x) = x^2 + 3$; b) $f(x) = x^2 + 3$ és $g(x) = \frac{2}{x}$;
c) $f(x) = \sin x$ és $g(x) = 3x + 4$; d) $f(x) = 3x + 4$ és $g(x) = \sin x$.

Az $y = f(g(x))$ összetett függvényt bontsd külső és belső, $f(x)$ és $g(x)$ függvényre (**316., 317.**)!

316. a) $y = (3x + 10)^3$; b) $y = (x^2 + 5x - 1)^4$; c) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

317. a) $y = \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$; b) $y = \frac{1}{2x + 4}$; c) $y = \frac{10}{(3x - x^2)^3}$.

Határozd meg a függvény deriváltfüggvényét (**318–324.**)!

318. a) $y = (x + 3)^{20}$; b) $y = (2 - x)^7$; c) $y = (1 - x^3)^5$.

319. a) $y = 5(1 - 2x)^7$; b) $y = (3 + x^2)^9$; c) $y = (2x + 1)^5$.

320. a) $y = \sin 4x$; b) $y = \operatorname{ctg} 2x$; c) $y = \operatorname{tg} 3x$;
d) $y = \operatorname{tg} \frac{3x}{4}$; e) $y = \sin \frac{x}{3}$; f) $y = \cos \frac{2x}{3}$.

321. a) $y = 2 + \sin 3x$; b) $y = 1 + \operatorname{tg} 3x$; c) $y = x + \cos 8x$;
d) $y = \sin x + \sin 2x$; e) $y = \cos x - \cos 2x$; f) $y = \operatorname{ctg} 5x$.

322. a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; b) $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; c) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$;
d) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; e) $y = \operatorname{tg}(3x + 1)$; f) $y = \cos(1 - x)$.

323. a) $y = \ln \sqrt{x}$; b) $y = e^{\sin x}$; c) $y = 0{,}5^{3x+2}$.

324. a) $y = 5^{2x}$; b) $y = \ln x^6$; c) $y = \cos 2^x$.

B

Határozd meg a függvény deriváltfüggvényét (**325–327.**)!

325. a) $y = x \sin 2x$; b) $y = x \cos 3x$;
c) $y = x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; d) $y = x \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

326. a) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; b) $y = \sqrt{x + 3} - \sqrt{3x}$;
c) $y = \sqrt{(x - 1)(x + 2)}$; d) $y = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

327. a) $y = \sin^4 x$; b) $y = 5\text{tg}^3 x$; c) $y = \sqrt{\sin x}$; d) $y = \sqrt{\text{tg}\, x}$.

Számítsd ki a függvény deriváltjának helyettesítési értékét az $x_0 = \frac{\pi}{12}$ helyen (**328., 329.**)!

328. a) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$.

329. a) $y = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; b) $y = \text{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Számítsd ki a függvény deriváltját az x_0 pontban (**330., 331.**)!

330. a) $y = (3x - 4)^7$, $x_0 = 2$; b) $y = (4 - 5x)^8$, $x_0 = 1$.

331. a) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$; b) $y = \sqrt{7x + 1}$, $x_0 = 5$.

Írd fel az $y = f(x)$ függvény grafikonjához az x_0 abszcisszájú pontba húzott érintő egyenletét (**332., 333.**)!

332. a) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; b) $y = \sqrt{2x + 3}$, $x_0 = 3$.

333. a) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; b) $y = \sqrt{5x - 1}$, $x_0 = 2$.

Egyszerűsítsd a függvény hozzárendelési szabályát, és add meg a deriváltfüggvényét (**334., 335.**)!

334. a) $y = 2\cos^2 x - 1$; b) $y = 1 - 2\sin^2 3x$;
c) $y = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$; d) $y = \sin^2 8x - \cos^2 8x$.

335. a) $y = \sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x$;
b) $y = \cos 4x \cos 6x + \sin 4x \sin 6x$.

Deriváld a függvényt célszerűen (**336., 337.**)!

336. a) $f(x) = \ln((3x - 4)^3)$; b) $f(x) = \ln(x(x^2 + 1))$.

337. a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3 + 2x}{x - 5}\right)$; b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{(2 - 3x)^2}\right)$.

Ismétlő feladatok

338. Rajzold le az alábbi függvények grafikonját, és jellemezd a monotonitásukat:
a) $y = |2x + 3|$; b) $y = |4 - x^2|$!

339. Oldd meg a következő egyenleteket:
a) $\lg^2 x = 1$; b) $\ln^2 x = 4$; c) $\log_2^2 x = 9$!

340. Add meg hatványalakban az alábbi kifejezéseket:
a) $a^5a^7a^{12}$; b) $(b^{-1}b^3)^{-2}b^{-3}$; c) $(a^3)^{-3}(a^3)^2$!

2. számú önálló munka

1. változat

1. Határozd meg az alábbi lineáris függvények meredekségét:
a) $y = \frac{1}{2}x - 3$; b) $y = -3x$; c) $y = 5x + 3$!

2. Az alábbi függvények közül melyik növekvő és melyik csökkenő:
a) $y = 3x - 1$; b) $y = 0{,}5x + 3$; c) $y = 1 - x$?

3. Határozd meg a következő függvények deriváltfüggvényeit:
a) $f(x) = 5x^3$; b) $f(x) = x^2(x - 3)$;
c) $f(x) = x + \sin x$; d) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$!

4*. Adott az $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ függvény. Számítsd ki az $f'(0)$ és $f'(-2)$ értékét!

2. változat

1. Határozd meg az alábbi lineáris függvények meredekségét:
a) $y = 3x - 2$; b) $y = -0{,}5x$; c) $y = \frac{3}{2}x + 0{,}1$!

2. Az alábbi függvények közül melyik növekvő és melyik csökkenő:
a) $y = 0{,}1x + 10$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 2x$?

3. Határozd meg a következő függvények deriváltfüggvényeit:
a) $f(x) = 3x^5$; b) $f(x) = (x^2 - 1)x$;
c) $f(x) = x^2 + \cos x$; d) $f(x) = 3\operatorname{ctg} x$!

4*. Adott az $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}$ függvény. Számítsd ki az $f'(1)$ és $f'(-2)$ értékét!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Mi a függvényvizsgálat?
2. Mikor növekvő egy függvény?
3. Mikor csökkenő?
4. Mi az egyenes meredeksége? Mivel egyenlő?
5. Hogyan értelmezzük a függvény érintőjét?
6. Add meg a függvény pontbeli deriváltjának definícióját!
7. Mi a deriválás, differenciálás?
8. Mikor mondhatjuk, hogy a függvény differenciálható egy pontban; adott intervallumon?
9. Fogalmazd meg: a) az egytagú kifejezés; b) az összegfüggvény deriváltjáról szóló tételt!
10. Hogyan kell szorzatot; hányadost deriválni?

10. §. A derivált alkalmazása függvényvizsgálatkor

A derivált segítségével különböző függvényeket tudunk vizsgálni.

A *függvényvizsgálat* azt jelenti, hogy meghatározzuk a tulajdonságait: megállapítjuk az értelmezési tartományát, értékkészletét, monotonitását, növekedésének és csökkenésének intervallumait, azokat az intervallumokat, amelyen a függvény vagy csak pozitív vagy csak negatív értéket vesz fel, tisztázzuk, páros-e vagy páratlan és így tovább.

A függvény növekedésének és csökkenésének meghatározásánál az alábbi állításokat alkalmazzuk:

ha egy függvény deriváltja egy adott intervallum minden pontjában pozitív, akkor a függvény ezen az intervallumon növekvő;

ha egy függvény deriváltja egy adott intervallum minden pontjában negatív, akkor a függvény ezen az intervallumon csökkenő;

ha egy függvény deriváltja egy adott intervallum minden pontjában nulla, akkor a függvény ezen az intervallumon állandó.

Két szomszédos intervallumot, melyek közül az egyiken a függvény nő, a másikon pedig csökken, csak olyan pont választhat el, melyben a függvény deriváltja nulla, vagy nem létezik. Az értelmezési tartomány azon belső pontjait, melyekben a függvény deriváltja nulla vagy nem létezik, a *függvény kritikus pontjainak* nevezzük.

Ahhoz, hogy meghatározzuk azokat az intervallumokat, ahol az $f(x)$ függvény növekszik vagy csökken, meg kell oldani az $f'(x) > 0$ vagy $f'(x) < 0$ egyenlőtlenséget vagy meg kell határozni a függvény kritikus pontjait, majd ezekkel a pontokkal intervallumokra kell osztani az értelmezési tartományt, és minden intervallumon tisztázni, nő-e vagy csökken a függvény.

1. példa. Határozzuk meg az $y = x^3 - 3x^2 + 2$ függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait!

● **Megoldás.** $y' = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

A $3x(x - 2) = 0$ egyenletnek két gyöke van, az $x = 0$ és az $x = 2$. Ezek a pontok a függvény kritikus pontjai. A függvény értelmezési tartományát, az R halmazt ezek a pontok a $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ és $(2; \infty)$ intervallumokra bontják. A derivált ezeken az intervallumokon rendre +, –, + előjelű. A vizsgálat eredményeit célszerű táblázatba foglalni.

Intervallumok	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	–3	↗

A táblázatból kiolvasható, hogy a függvény a $(-\infty; 0)$ és $(2; \infty)$ intervallumon növekvő, a $(0; 2)$ intervallumon pedig csökkenő.

Mivel az $y = x^3 - 3x^2 + 2$ függvény folytonos, ezért úgy fogadták el, hogy a függvény a $(-\infty; 0]$ és $[2; \infty)$ intervallumon növekvő, a $[0; 2]$ intervallumon pedig csökkenő.

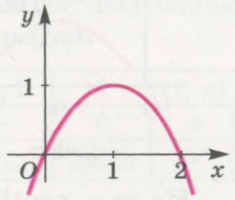
A függvényvizsgálatban fontos szerepet tölt be a függvény legkisebb és legnagyobb értékének meghatározása. Hogy tisztázzuk mi is ez, néhány új fogalmat kell bevezetni.

Az x_0 *pont környezetének* nevezünk egy tetszőleges olyan intervallumot, melynek x_0 az egyik belső pontja.

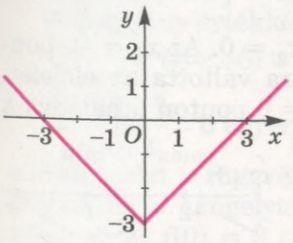
Az x_0 pontot az $f(x)$ függvény lokális *minimumhelyének* (lokális *maximumhelyének*) nevezzük, hogyha az x_0 pont valamely környezetének minden x elemére teljesül az $f(x_0) < f(x)$ (vagy $f(x_0) > f(x)$) egyenlőtlenség. A függvény helyettesítési értékét a minimumhelyénél (maximumhelyénél) a függvény *minimumértékének* (*maximumértékének*) nevezzük. Jelölésük: y_{min}, y_{max}.

A függvény minimum- és maximumpontjait a függvény *extrémumpontjainak (szélsőértékhelyeinek)* nevezzük (az *extremum* szó latinul annyit jelent, hogy végletekig). A függvény helyettesítési értékét az extrémumpontokban a függvény *extrémumértékeinek* vagy *extrémumainak* (*szélsőértékeinek*) nevezzük.

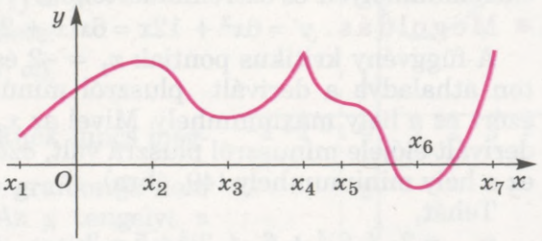
Például az $y = 2x - x^2$ függvénynek az $x = 1$ érték a maximumhelye (43. ábra). Maximumértéke: $y_{max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$.



43. ábra



44. ábra



45. ábra

Az $x = 0$ érték az $y = |x| - 3$ függvény minimumhelye (44. ábra). Minimuma: $y_{min} = 0 - 3 = -3$.

Annak a függvénynek, melynek a grafikonja a 45. ábrán látható, 4 extrémumpontja van: x_2 és x_4 maximumhely, x_3 és x_6 minimumhely.

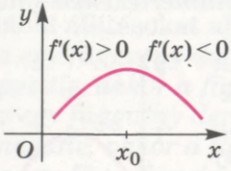
Extrémumpont csak a függvény kritikus pontja lehet. Ez az extrémumpont létezésének szükséges feltétele.

Az extrémumpontokat a függvény kritikus pontjai közül választhatjuk ki, ha teljesülnek az elégséges feltételek is.

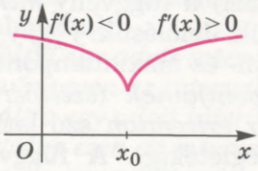
Legyen az $x = a$ egy $(b; c)$ intervallum olyan belső pontja, melynél a $(b; a)$ és $(a; c)$ intervallumokon a függvény deriváltja létezik és az előjele állandó. Ha ezen a kritikus ponton áthaladva a kisebb argumentumtól a nagyobb argumentum felé a derivált előjelet vált

„ + „-ról „ – „-ra, akkor ez a hely maximumhely, és ha a derivált előjele „ – „-ról „ + „-ra vált, akkor minimumhely.

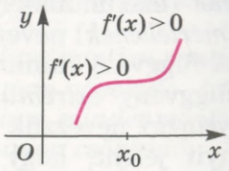
Valóban, ha az $f(x)$ függvény deriváltfüggvénye az $(a; x_0)$ intervallumon pozitív, az $(x_0; b)$ intervallumon pedig negatív, akkor az x_0 ponton áthaladva a függvény növekedésből csökkenésbe megy át (46. ábra). Ebben az esetben az x_0 pont maximumhely. Ha pedig az x_0 ponton áthaladva a függvény csökkenésből növekedésbe megy át, akkor az x_0 pont minimumhely (47. ábra).



46. ábra



47. ábra



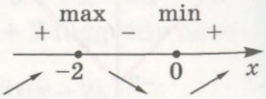
48. ábra

Ha az x_0 pontban a függvény deriváltja nulla, viszont a ponttól jobbra és balra is pozitív a derivált, vagy jobbról és balról is negatív, akkor az x_0 pont nem extrémumhely.

2. példa. Határozzuk meg az $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$ függvény extrémumhelyeit és extrémumértékeit!

● **Megoldás.** $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

A függvény kritikus pontjai: $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$. Az $x_1 = -2$ ponton áthaladva a derivált pluszról mínuszra váltotta az előjelét, ezért ez a hely maximumhely. Mivel az $x_2 = 0$ ponton áthaladva a derivált előjele mínuszról pluszra vált, ezért ez a hely minimumhely (49. ábra).



49. ábra

Tehát,

$y_{max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3$;

$y_{min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5$.

Felelet: $x_1 = -2$ maximumhely, $y_{max} = 3$; $x_2 = 0$ minimumhely, $y_{min} = -5$.

A függvényvizsgálatot az alábbi séma szerint végezzük:

1) meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát;

2) megállapítjuk, hogy a függvény páros-e vagy páratlan, periodikus-e;

3) meghatározzuk a függvénygrafikon és a koordinátatengelyek metszéspontját;

4) megvizsgáljuk a függvény monotonitását, meghatározzuk azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény növekvő, és amelyeken csökkenő;

5) megkeressük a függvény extrémumhelyeit és extrémumértékeit;

6) megrajzoljuk a függvény képét, a grafikont.

3. példa. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ függvényt!

● **Megoldás.** A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve $x = -1$-et! Az értelmezési tartomány miatt a függvény nem lehet páros, páratlan, periodikus.

Határozzuk meg a függvény deriváltfüggvényét!

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

A függvény kritikus pontjai: $x_1 = -3$ és $x_2 = 1$. Ezek a pontok az értelmezési tartományt négy intervallumra bontják. Készítsünk táblázatot, és állapítsuk meg a függvény tulajdonságait!

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Nem létezik	–	0	+
$f(x)$	↗	-6 max	↘	Nem létezik	↘	2 min	↗

A $(-\infty; -3]$ és $[1; \infty)$ intervallumon a függvény nő, a $[-3; -1)$ és $(-1; 1]$ intervallumon csökken.

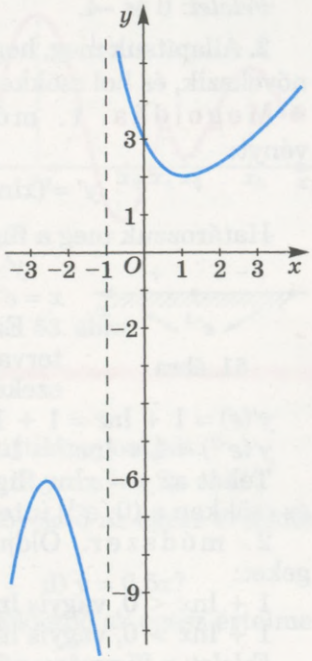
Maximumpont: $x_1 = -3$, $f(-3) = -6$; minimumpont: $x_2 = 1$, $f(1) = 2$.

A függvény értékkészlete:

$$(-\infty; -6) \cup (2; \infty).$$

Az $\dfrac{x^2+3}{x+1} = 0$ egyenletnek nincs megoldása, ezért a függvény grafikonja nem metszi az x tengelyt. Az y tengelyt a grafikon az $f(0) = 3$ ordinátájú pontban metszi.

A függvény grafikonja az 50. ábrán látható.



50. ábra

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Melyek a függvény kritikus pontjai?
2. Milyen feltétel mellett növekvő (csökkenő) egy függvény egy adott intervallumon?
3. Hogyan lehet meghatározni azokat az intervallumokat, melyeken a függvény növekvő (csökkenő)?
4. Mi a függvény maximumpontja? Minimumpontja?
5. Mi az extrémumpont? Mi a függvény extrémumértéke?
6. Mit jelent a függvény vizsgálata?

Közös munka

1. Határozzuk meg az $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ függvény kritikus pontjait!

● **Megoldás.** $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Határozzuk meg a függvény deriváltját:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Határozzuk meg azokat a pontokat, melyekben a derivált nulla vagy nem létezik:

$y' = 0$, ha $\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0$, innen $x = 0$ és $x = -4$;

y' nem létezik, ha a tört nevezője nulla, innen $x = -2$.

Az $x = -2$ nem tartozik a függvény értelmezési tartományához.

Tehát a függvénynek két kritikus pontja van: $x = 0$ és $x = -4$.

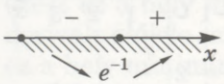
Felelet: 0 és –4.

2. Állapítsuk meg, hogy az $y = x\ln x$ függvény mely intervallumon növekszik, és hol csökken!

● **Megoldás.** 1. módszer. $D(y) = (0; \infty)$. Deriváljuk a függvényt:

$$y' = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

Határozzuk meg a függvény kritikus pontjait:



51. ábra

$y' = 0$, ha $1 + \ln x = 0$, vagyis $\ln x = -1$, innen $x = e^{-1}$.

Ez a pont az értelmezési tartományt két intervallumra osztja (51. ábra). Határozzuk meg ezeken az intervallumokon a derivált előjelét!

$y'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2 > 0$;

$y'(e^{-2}) = 1 + \ln e^{-2} = 1 - 2\ln e = -1 < 0$.

Tehát az $y = x\ln x$ függvény növekszik az $[e^{-1}; \infty)$ intervallumon és csökken a $(0; e^{-1}]$ intervallumon.

2. módszer. Oldjuk meg az $y' > 0$ és $y' < 0$ egyenlőtlenségeket:

$1 + \ln x < 0$, vagyis $\ln x < \ln e^{-1}$, innen $0 < x < e^{-1}$;

$1 + \ln x > 0$, vagyis $\ln x > \ln e^{-1}$, innen $x > e^{-1}$.

Felelet: a függvény nő, ha $x \in [e^{-1}; \infty)$, és csökken, ha $x \in (0; e^{-1}]$.

3. Végezzük el az $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ függvény teljes vizsgálatát, és ábrázoljuk a grafikonját!

● **Megoldás.** 1) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

2) A függvény páratlan, mivel $y(-x) = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -y(x)$.

Tehát a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra, ezért elégséges a függvényt a $[0; 2) \cup (2; \infty)$ intervallumon vizsgálni.

3) Ha $x = 0$, akkor $y = 0$, így a függvény grafikonja csak egy pontban metszi a koordinátatengelyeket, ez a pont $(0; 0)$.

4) Határozzuk meg a függvény deriváltját!

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}.$$

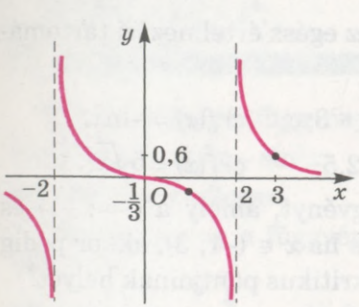
Könnyen belátható, hogy az értelmezési tartomány bármely x értékére $y' < 0$.

Tehát a függvénynek nincs se maximuma, se minimuma, és csökkenő a $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$ intervallumok mindegyikén.

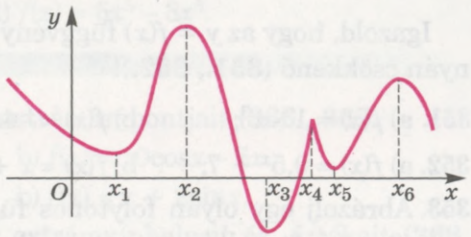
A pontosabb rajz érdekében határozzuk meg a függvény néhány helyettesítési értékét:

$$y(1) = -\frac{1}{3};\ y(1{,}5) = -\frac{6}{7};\ y(3) = 0{,}6;\ y(4) = \frac{1}{3}.$$

A függvény grafikonja az 52. ábrán látható.



52. ábra



53. ábra

Szóbeli feladatok

341. Határozd meg az alábbi függvények kritikus pontjait:

a) $y = x^3$; b) $y = \sin x$; c) $y = \sqrt{x}$; d) $y = x^2 + 2x + 1$!

342. Az alábbi függvények közül melyik növekvő az egész értelmezési tartományán:

a) $y = \lg x$; b) $y = x^3$; c) $y = 2^{-x}$; d) $y = 0{,}5x$?

343. Az alábbi függvények közül melyik csökkenő az egész értelmezési tartományán:

a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = \log_{1,5} x$; c) $y = 0{,}5^x$; d) $y = -5x$?

344. Az 53. ábrán egy függvény grafikonja látható. Határozd meg a függvény:

a) kritikus pontjait;

b) növekedésének és csökkenésének intervallumait;

c) maximum- és minimumpontjait!

345. Hány szélsőértékhelye lehet az $y = f(x)$ függvénynek, ha az egy harmad-; negyed-; ötödfokú polinomfüggvény?

A

Határozd meg a függvény kritikus pontjait (**346–348.**)!

346. a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; b) $f(x) = x - \ln x$.

347. a) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$; b) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

348. a) $f(x) = e^{-x} + x$; b) $f(x) = \cos 2x$.

Bizonyítsd be, hogy az $y = f(x)$ függvény az egész értelmezési tartományán növekvő (**349., 350.**)!

349. a) $f(x) = x^3 + 3$; b) $f(x) = 4x - 1$; c) $f(x) = 5 + \ln x$.

350. a) $f(x) = 2^x - 3$; b) $f(x) = x + 2{,}5$; c) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

Igazold, hogy az $y = f(x)$ függvény az egész értelmezési tartományán csökkenő (**351., 352.**)!

351. a) $f(x) = 1 - x^3$; b) $f(x) = -4x + 3$; c) $f(x) = -\ln x$.

352. a) $f(x) = 0{,}5^x + 7$; b) $f(x) = x + 2{,}5$; c) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

353. Ábrázolj egy olyan folytonos függvényt, amely a $(-\infty; -1)$ és $(3; \infty)$ intervallumon növekszik, és ha $x \in (-1; 3)$, akkor pedig csökken. Nevezd meg a függvény kritikus pontjainak helyét!

Határozd meg a függvény monotonitási intervallumait (**354–356.**)!

354. a) $f(x) = 3 - 2x^2$; b) $f(x) = 2x - x^2$.

355. a) $f(x) = x^4 - 2x^2$; b) $f(x) = x^2(x + 5)$.

356. a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$; b) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

357. Határozd meg az alábbi függvények minimumhelyeit:
a) $y = x + x^2$; b) $y = x^2 - 6x - 3$; c) $y = 5x^2 - 4x$!

358. Határozd meg az alábbi függvények maximumhelyeit:
a) $y = 5 - x^2$; b) $y = 1 - x - x^2$; c) $y = x - 2x^2$!

359. Határozd meg az alábbi függvények extrémumhelyeit:
a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; b) $y = 1 + 8x^2 - x^4$;
c) $y = -x^3 + 12x + 7$!

Határozd meg a függvény extrémumhelyeit és -értékeit (**360–362.**)!

360. a) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; b) $f(x) = x^2 + x + 1$.

361. a) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

362. a) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; b) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

363. Ábrázolj egy olyan folytonos függvényt, amely a $(-\infty; -1]$ és $[3; 5]$ intervallumon csökken, és növekszik a $(-1; 3)$, illetve $(5; \infty)$ intervallumon. Vedd figyelembe, hogy a függvény minimumértékei egyenlők. Az általad ábrázolt grafikonról olvasd le a függvény kritikus helyeit és -értékeit!

Végezz teljes függvényvizsgálatot, és ábrázold a függvény grafikonját (**364., 365.**)!

364. a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; b) $f(x) = 4 + 5x - x^2$;
c) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; d) $f(x) = 3x - x^3$.

365. a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + 5$; b) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$;
c) $f(x) = 4x^2 - x^4$; d) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

B

Határozd meg a függvény extrémumpontjait (**366., 367.**)!

366. a) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; b) $f(x) = 10\cos x - 5x$.

367. a) $f(x) = x - 2\cos x$; b) $f(x) = x + 2\sin x$.

Határozd meg a függvény extrémumhelyeit és -értékeit (**368., 369.**)!

368. a) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; b) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

369. a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; b) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

370. Igazold, hogy az alábbi függvényeknek nincsenek extrémumai:
a) $f(x) = 2x + \sin x$; b) $f(x) = -3x - \cos x$!

371. Igazold, hogy az $y = a^x$ függvény egész értelmezési tartományán:
a) növekvő, ha $a > 1$; b) csökkenő, ha $0 < a < 1$!

372. Igazold, hogy az $y = \log_a x$ függvény egész értelmezési tartományán:
a) növekvő, ha $a > 1$; b) csökkenő, ha $0 < a < 1$!

373. Igazold, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon nő, az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény pedig csökken!

374. Határozd meg az alábbi függvények maximum- és minimumértékeit:
a) $y = x - \ln(1+x)$; b) $y = xe^{-x}$; c) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$!

Végezz teljes függvényvizsgálatot, és ábrázold a függvény grafikonját (**375–377.**)!

375. a) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

376. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; b) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

377. a) $f(x) = x\sqrt{3-x}$; b) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$.

Ismétlő feladatok

378. Határozd meg 175 és 280 legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját!

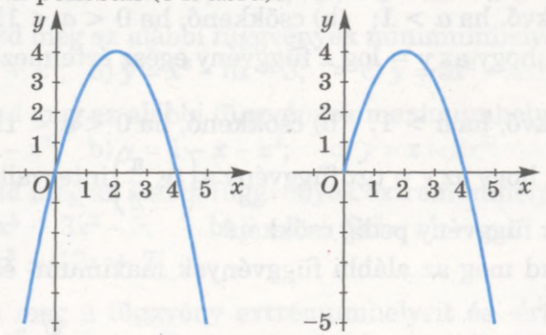
379. Gyöktelenítsd az alábbi törtek nevezőjét:

a) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$; b) $\dfrac{m}{\sqrt{n}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$!

380. Egy farmon libákat tartottak, amiket kutyák őriztek. Hány liba és hány kutya volt a farmon, ha összesen 98 fejük és 202 lábuk volt?

11. §. A függvény legkisebb és legnagyobb értéke

Nem lehet egy függvény lokális maximumértékét és minimumértékét a függvény *legnagyobb* és *legkisebb értékével* azonosítani. A függvény lokális maximumhelye (lokális minimumhelye) a függvény értelmezési tartományának olyan pontja, amiben a legnagyobb (legkisebb) értékét veszi fel a függvény a pont környezetében. Egy függvény adott intervallumon vett legnagyobb vagy legkisebb értéke pedig nem biztos, hogy a függvény abszolút maximuma vagy minimuma. Például az $f(x) = 4x - x^2$ függvénynek az $x = 2$ helyen abszolút maximuma van és nincs abszolút minimuma. Viszont a $[0; 5]$ intervallumon a függvény legkisebb értékét az intervallum végpontjában veszi fel: $f(5) = -5$, a legnagyobb értékét pedig az $x = 2$ pontban (54. ábra).



54. ábra

Egy függvénynek több lokális maximuma (minimuma) is lehet, viszont nem lehet egy több legnagyobb (legkisebb) értéke (abszolút maximuma, minimuma) (lásd az 53. ábrát). Egy függvénynek nem biztos, hogy van maximuma (minimuma) az adott intervallumon, viszont lehet legnagyobb (legkisebb) értéke.

A függvény legnagyobb és legkisebb értéke szorosan függ a függvény értékkészletétől. Ha egy függvény értékkészlete $[m; M]$, akkor a függvény legkisebb értéke m, a legnagyobb értéke pedig M.

Ahhoz, hogy meghatározzuk egy függvény legnagyobb és legkisebb értékét az $[a; b]$ intervallumon, ki kell számolni a függvény értékét az intervallum végpontjaiban ($f(a)$-t és $f(b)$-t) és az intervallumhoz tartozó kritikus pontokban, majd közülük kiválasztani a legnagyobbat, valamint a legkisebbet.

Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a $[-4; 4]$ intervallumon!

● **Megoldás.** $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

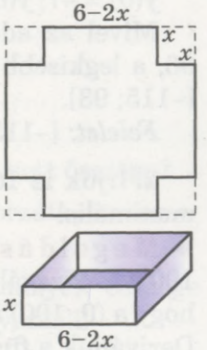
A függvény kritikus pontjai: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$. A függvényértékek ezeken a helyeken és az intervallum végpontjaiban:

$f(-4) = 10$; $f(-3) = 17$; $f(1) = -15$ (legkisebb érték); $f(4) = 66$ (legnagyobb érték).

Felelet: $\max\limits_{[-4;4]} f(x) = 66$, $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -15$.

A derivált segítségével könnyen megoldhatók a *szélsőértékhely-feladatok*, azok a feladatok, melyekben egy adott mennyiség legnagyobb vagy legkisebb értékét kell meghatározni.

Feladat. Egy négyzet alakú vaslemezből, melynek oldalhossza 6 dm, fedél nélküli dobozt szeretnének készíteni. Mekkora négyzeteket kell a sarkokból levágni ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen (55. ábra)?



55. ábra

● **Megoldás.** Ahhoz, hogy téglatest alakú dobozt készítsünk, a sarkokból egyenlő négyzeteket kell kivágni. Legyen x annak a négyzetnek az oldala, amit levágunk. Ekkor a doboz magassága x lesz, az alapéle pedig $6 - 2x$. A doboz térfogata $V(x) = (6 - 2x)^2x$ az x függvénye. Nyilvánvaló, hogy x csak pozitív és 3-nál kisebb értéket vehet fel. A feladat matematikai modellje: meg kell határozni az argumentum azon értékét, melynél a $V(x) = (6 - 2x)^2x$ függvény felveszi a $(0; 3)$ intervallumon a legnagyobb értékét.

Határozzuk meg a függvény deriváltfüggvényét!

$V(x) = 36x - 24x^2 + 4x^3$; $V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$.

A kritikus pontok meghatározásához a deriváltfüggvényt egyenlítsük a nullához, és oldjuk meg a kapott egyenletet!

$12x^2 - 48x + 36 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. x_2 nem eleme a (0; 3) intervallumnak.

Ha $x < 1$, akkor $V'(x) > 0$, ha viszont $x > 1$, akkor $V'(x) < 0$. Tehát a $V(x)$ függvény maximális értékét az $x = 1$ helyen veszi fel.

Felelet: 1 dm oldalhosszúságú négyzetet kell kivágni.



ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a függvény legnagyobb (legkisebb) értéke adott intervallumon?
2. Ugyanazt jelenti-e a függvény lokális maximuma és a legnagyobb értéke?
3. Hogyan kell meghatározni a függvény $[a; b]$ intervallumon vett legnagyobb vagy legkisebb értékét?



Közös munka

1. Határozzuk meg az $x \in [0; 10]$ intervallumon értelmezett $y = x^3 - 9x^2 - 7$ függvény értékkészletét!

● **Megoldás.** $y' = (x^3 - 9x^2 - 7)' = 3x^2 - 18x$.

Határozzuk meg a függvény kritikus pontjait: $y' = 0$, ha $3x^2 - 18x = 0$, vagyis $3x(x - 6) = 0$. Innen $x = 0$, $x = 6$.

Határozzuk meg a függvény helyettesítési értékeit a [0; 10] intervallum végpontjaiban, valamint az $x = 6$ kritikus pontban:

$y(0) = -7$; $y(6) = -115$; $y(10) = 93$.

Mivel az adott függvény folytonos, ezért a legnagyobb értéke 93, a legkisebb értéke pedig –115. Ezért a függvény értékkészlete [–115; 93].

Felelet: [–115; 93].

2. Írjuk le 100-at két olyan szám összegeként, melyek szorzata maximális!

● **Megoldás.** Legyen az egyik összeadandó x, akkor a másik $100 - x$. Vizsgáljuk az $y = x(100 - x)$ függvényt, és határozzuk meg, hogy a (0; 100) intervallum mely x-re veszi fel a legnagyobb értékét. Deriváljuk a függvényt, egyenlítsük a nullához, és határozzuk meg a függvény kritikus pontjait.

$y' = \big(x(100 - x)\big)' = (100x - x^2)' = 100 - 2x$; $100 - 2x = 0$; $x = 50$.

Ha $x < 50$, akkor $y' > 0$, ha viszont $x > 50$, akkor $y' < 0$. Tehát a függvény legnagyobb értékét az $x = 50$ helyen veszi fel.

Felelet: $100 = 50 + 50$.

Szóbeli feladatok

381. Van-e az alábbi függvénynek legnagyobb értéke:
a) $y = x^3$; b) $y = e^x$; c) $y = \lg x$; d) $y = 2x + 1$?

382. Állapítsd meg az alábbi függvények legkisebb értékét:
a) $y = x^4$; b) $y = \sin x$; c) $y = \sqrt{x}$; d) $y = 2^{|x|}$!

383. Állapítsd meg az $y = x^2$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:
a) $[0; 2]$; b) $[-1; 1]$; c) $[-2; 0]$; d) $[-5; 2]$!

384. Lehet-e egy függvény lokális maximumértéke kisebb lokális minimumértékénél?

385. Lehet-e a függvény legnagyobb értéke kisebb egy extrémumértékénél? És fordítva?

A

386. Határozd meg az $y = x^3 - 1$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:
a) $[0; 2]$; b) $[-1; 1]$; c) $[-2; 0]$; d) $[-3; 3]$!

387. Határozd meg az $y = x^2 - 2x$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:
a) $[-1; 0]$; b) $[-1; 1]$; c) $[-2; 0]$; d) $[0; 3]$!

Határozd meg a függvény legkisebb és legnagyobb értékét (**388–390.**)!

388. $f(x) = x^2 - 4x$ a $[-3; 3]$ intervallumon.

389. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ a $[-2; 2]$ intervallumon.

390. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ a $[-3; 1]$ intervallumon.

391. Melyik számnak minimális a saját négyzetével vett összege?

392. Milyen maximális értéket vehet fel két szám szorzata, ha összegük 64?

393. Bizonyítsd be, hogy azon számok szorzata, melyek összege állandó, akkor maximális, ha ezek a számok egyenlők!

394. Írjuk fel 10-et két olyan szám összegeként, melyek szorzata maximális!

395. Melyik számnak és reciprokának minimális az összege?

396. Egy téglalap alakú strucckifutó területe 40 000 m^2. Milyen méretű legyen ez a kifutó, hogy a bekerítéséhez a legkevesebb hálóra legyen szükség?

397. Be kell keríteni két egybevágó téglalap alakú legelőt, melyek egyik oldala közös, területük pedig összesen 6 ha. Határozd meg a kerítés lehető legkisebb hosszát!

B

Határozd meg a függvény legkisebb és legnagyobb értékét az adott intervallumon (**398–399.**)!

398. a) $f(x) = x^5 - x^3 + x - 7$ a következő intervallumon: 1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 2]$;

b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ a következő intervallumon: 1) $[0; 2]$; 2) $[-1; 5]$.

399. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ a következő intervallumon: 1) $[-2; 2]$; 2) $[0; 3]$;

b) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ a következő intervallumon: 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -1]$.

400. Van-e legnagyobb vagy legkisebb értéke R-en az alábbi függvényeknek:

a) $f(x) = x^3 - 5x + 2$; b) $f(x) = 3 - 2x^2 - x^5$?

Határozd meg a függvény értékkészletét (**401–402.**)!

401. a) $y = x^6 - 3x^4 + 2$; b) $y = 2 - x^2 - x^4$.

402. a) $y = \sqrt{4 - x - x^2}$; b) $y = x + \frac{1}{x}$.

403. Az AB szakasz hossza 6 egység, az M pont a szakasz felezőpontja. Határozd meg az AB szakasz azon X pontját, melyre az XA, XB és XM szakaszok hosszának szorzata maximális!

404. Adott körbe írt téglalapok közül melyik területe maximális? Oldd meg kétféleképpen!

405. Adott körbe írt téglalapok közül melyik kerülete maximális?

406. Milyennek kell lennie egy 32 m^3 térfogatú, négyzet alapú és arra merőleges falú medencének ahhoz, hogy a kicsempézéséhez a legkevesebb csempére legyen szükség?

407*. Milyen méretűnek kell lenni a henger alakú, egy literes konzervdoboznak, hogy az elkészítéséhez a lehető legkevesebb fémre legyen szükség? Az összeillesztéshez szükséges anyagmennyiség elhanyagolható. A henger térfogata az alaplap területének és magasságának a szorzata.

Ismétlő feladatok

408. Írd le az $y = x^3 + x^2$ függvény grafikonjához az $x_0 = -2$ abszcisszájú pontba húzott érintő egyenletét!

409. Határozd meg az $y = 5x^2 + 1$ függvény növekménye és az argumentum növekménye hányadosának határértékét, ha az argumentum növekménye nullához tart!

410. Egy motoros hajó a két kikötő közötti távolságot a folyón lefelé 1,6 óra alatt tette meg, visszafelé 2 óra alatt. Határozd meg a hajó sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 2 km/h!

12. §. A derivált mint változási sebesség

Eddig a deriváltat úgy értelmeztük, mint a függvény grafikonjához húzott érintő iránytangensét (mértani értelmezés). Viszont a derivált különböző jelenségek változási sebességeként is értelmezhető. Ilyen lehet a rakéta, a bolygók, repülőgépek, autók mozgása, az inga, dugattyú, a balerina forgása, kémiai reakciók lefolyása, test felmelegedése, a baktérium szaporodása, növények és állatok növekedése, pénzbevétel és -kiadás növekedése.

Példa. Egy test egyenes vonalúan, egyenletesen változó sebességgel halad. A test által t idő alatt megtett s út a t idő függvénye. Az $s = f(t)$ egyenlőség a mozgás hozzárendelési szabálya. Ha ismerjük a mozgás törvényét, meg lehet-e határozni a test t időpontbeli pillanatnyi sebességét?

A test a t időponttól a $t + \Delta t$ időpontig $f(t + \Delta t) - f(t)$ utat tesz meg. Ez alatt az idő alatt a test $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ átlagsebességgel haladt.

Ha $\Delta t \to 0$, akkor ennek az aránynak az értéke alig különbözik a test t időpontbeli pillanatnyi sebességétől:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Ez viszont az $s = f(t)$ függvény deriváltfüggvénye. Tehát *ha a test mozgástörvényét az $s = f(t)$ függvény írja le, akkor a sebességét bármely t időpontban a függvény deriváltfüggvénye adja meg: $v(t) = s'(t)$.*

Vizsgáljunk meg egy konkrét példát. Mint ismeretes, a szabadesés törvényét (ha nem vesszük figyelembe a levegő ellenállását) az $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$ képlet írja le (ahol $g \approx 9{,}8$ m/s^2 a földtömeg vonzásából eredő gyorsulás). Milyen sebességgel esik egy test az esés kezdete utáni t időpontban?

Ez a feladat így is megoldható. A t időponttól a $t + \Delta t$ időpontig a test $\dfrac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$ távolságot tesz meg

$\frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2) : \Delta t = \frac{g}{2}(2t + \Delta t)$ átlagsebességgel. Ha $\Delta t \to 0$, akkor $v(t) \to \frac{g}{2}(2t + 0)$, vagyis $v(t) = gt$. A fizikából jól ismert eredményre jutottunk.

Így a feladatot megoldottuk a derivált fogalma nélkül. Viszont tudva, hogy a sebesség az út deriváltja, rögtön felírható:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{g}{2}t^2\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Ugyanígy meghatározható nemcsak az egyenes vonalúan mozgó test sebessége, hanem más folyamatok pillanatnyi sebessége is, úgy mint a kémiai reakciók, a maghasadás, a testek felmelegedésének, a baktériumok szaporodásának sebessége. Általánosságban mondhatjuk: ha valamilyen folyamat az $y = f(t)$ törvény szerint megy végbe, akkor a folyamat lefolyásának t pillanatnyi sebességét a $v(t) = f'(t)$ képlettel lehet meghatározni. Ezért gyakran röviden csak így fogalmaznak: a *derivált= változási sebesség*. Ez a derivált fizikai jelentése.

A mozgás sebessége is változhat. Az egyenes vonalú mozgás sebességének a változása a gyorsulás. Ezért a gyorsulás a sebesség deriváltja. Tehát, ha a test mozgásának sebességét a $v(t) = gt$ képlettel lehet kiszámítani, akkor a gyorsulása $a(t) = (gt)' = g$.

Nézzünk egy másik példát. Ha egy folyamat az $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 8$ törvény szerint megy végbe, akkor a pillanatnyi sebessége a t időpontban $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, a pillanatnyi gyorsulása pedig $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

A derivált fogalmát alkalmazzák a tudományok több területén és gyakorlati feladatokban is. Példaként felhozunk néhány gyakran alkalmazott képletet, amelyben a derivált fogalmát alkalmazzuk:

$\omega(t) = \varphi'(t)$ – a szögsebesség, a forgásszög deriváltja;
$a(t) = \omega'(t)$ – a szöggyorsulás, a szögsebesség deriváltja;
$I(t) = q'(t)$ – az áramerősség, a töltésmennyiség deriváltja;
$N(t) = A'(t)$ – a teljesítmény, a munka deriváltja;
$C(t) = Q'(t)$ – a hőkapacitás, a hőmennyiség deriváltja;
$P(t) = V'(t)$ – a termelékenység, az előállított termék mennyiségének deriváltja.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a derivált geometriai értelmezése?
2. Mi a derivált fizikai értelmezése?
3. Hogyan értelmezed a *derivált – a változás sebessége* kifejezést?

Közös munka

1. A jelzőrakéta az $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ törvény szerint repül felfelé (t másodpercben van mérve, s méterben). Határozzuk meg: a) a rakéta sebességét 5 másodperc múlva; b) milyen maximális magasságot érhet el ez a rakéta?

● **Megoldás.** a) Határozzuk meg a rakéta sebességét bármely pillanatban, mint az $s(t)$ út deriváltját:

$$v(t) = s'(t), \text{ vagy } v(t) = (98t - 4{,}9t^2)' = 98 - 9{,}8t.$$

Ezért $v(5) = 98 - 9{,}8 \cdot 5 = 98 - 49 = 49$ (m/s).

b) Határozzuk meg az $s(t)$ függvény extrémumát, oldjuk meg az $s'(t) = 0$, vagyis a $98 - 9{,}8t = 0$ egyenletet. Innen $t = 10$ (s).

Ha $t < 10$, akkor $s'(t) > 0$; ha $t > 10$, akkor $s'(t) < 0$. Tehát a $t = 10$ s időpont a függvény maximumhelye. Ezért $s(10) = 98 \cdot 10 - 4{,}9 \cdot 10^2 = 490$ (m).

Felelet: a) 49 m/s; b) 490 m.

2. Azt a hőmennyiséget, ami 1 kg 0 °C-os víz t °C-ra ($0° \leqslant t \leqslant 95°$) való felmelegítéséhez szükséges, megközelítőleg az alábbi képlettel lehet meghatározni:

$$Q(t) = 0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3.$$

Állapítsd meg, hogyan függ a hőkapacitás $C(t)$ nagysága a t hőmérséklettől!

● **Megoldás.** $C(t) = Q'(t) = (0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3)' = 0{,}396 + 4{,}162 \cdot 10^{-3}t - 15{,}072 \cdot 10^{-7}t^2$.

3. Egy 10 kg tömegű test az $x(t) = t^2 + t + 1$ törvény szerint mozog (t másodpercben van mérve, x méterben). Határozzuk meg: a) a test mozgási (kinetikus) energiáját az indulás utáni 5. másodpercben; b) azt az erőt, ami erre a testre hat ebben a pillanatban!

● **Megoldás.** a) A test mozgási energiáját az $E = \frac{mv^2}{2}$ képlettel lehet meghatározni, ahol m a test tömege, v a test sebessége. Határozzuk meg a test $v(t)$ sebességét, majd a sebességet az indulás utáni 5. másodpercben, $v(5)$-öt:

$$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1, \; v(5) = 11 \text{ (m/s)}.$$

Ekkor $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 11^2}{2} = 5 \cdot 121 = 605$ (J).

b) A mozgó testre ható erőt az $F = ma$ képlettel lehet meghatározni.

Határozzuk meg az $a(t)$ gyorsulást, majd a gyorsulást az indulás utáni 5. másodpercben, $a(5)$-öt:

$$a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2 \text{ (m/s}^2\text{)}, \; a(5) = 2 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Tehát $F = ma = 10 \cdot 2 = 20$ (N).

Szóbeli feladatok

411. Határozd meg az $s(t)$ törvény szerint mozgó test pillanatnyi sebességét, ahol a t időt másodpercben mérjük, s-t méterben:
a) $s(t) = 5t^2 + t$; b) $s(t) = 1 - 3t$;
c) $s(t) = t^2 - 1$; d) $s(t) = 2t^3 + t$!

412. Határozd meg az $s(t)$ törvény szerint mozgó test pillanatnyi gyorsulását, ahol a t időt másodpercben mérjük, s-t méterben:
a) $s(t) = t^2 + t$; b) $s(t) = 1 - 3t^2$;
c) $s(t) = 5t - 1$; d) $s(t) = 2t^3 + 5$!

413. Hogyan függ egy fiatal munkás teljesítménye a munkára fordított időtől, ha az általa előállított termékek számát a $V(t) = 10 + 6t^2 - t^3$ képlettel lehet meghatározni?

A

414. Határozd meg az alábbi törvény szerint rezgő test sebességét:
a) $x(t) = 10\cos\pi t$; b) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; c) $x(t) = 0{,}1\cos 10\pi t$!

415. Egy belső égésű motor munkavégzését az $A(t) = 15t^2 + 360$ képlettel lehet meghatározni ($A(t)$ joule-ban, t másodpercben van mérve). Mekkora a motor teljesítménye?

416. Egy anyagi pont egyenes vonalúan mozog az $x(t) = 100 + t^2$ törvény szerint (a t időt másodpercben, az x koordinátát méterben mérve). Határozd meg ennek az anyagi pontnak a sebességét az adott pillanatban:
a) $t = 5$ s; b) $t = 23$ s!

417. Egy anyagi pont által megtett utat az $s = 4t^2 + 3t$ függvény írja le. Határozd meg: a) az anyagi pont sebességét t függvényében; b) az anyagi pont gyorsulását t függvényében; c) a sebességet és a gyorsulást a $t = 5$ s-ban!

418. Egy pont tengely körüli forgását a $\varphi(t) = 3t^2 + 4t + 2$ összefüggés írja le, ahol az időt másodpercben, a $\varphi(t)$ forgásszöget pedig radiánban mérjük. Határozd meg a szögsebességet: a) t függvényében; b) a $t = 4$ s-ban!

419. Egy test egyenes vonalú mozgását az $s(t) = 7t^3 - 5t$ összefüggés írja le. Határozd meg ennek a testnek a sebességét és a gyorsulását az adott pillanatban:
a) $t = 1$ s; b) $t = 2$ s; c) $t = 3$ s!

420. Egy lendkerék a $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ összefüggés szerint csillapodik, ahol az időt másodpercben, a $\varphi(t)$ forgásszöget pedig radiánban mérjük. Mikor áll meg a lendkerék?

421. Egy test T hőmérséklete melegítéskor a $T = 0{,}4t^2$ függvény szerint változik, ahol a hőmérsékletet fokokban, az időt másodpercekben mérjük. Határozd meg a hőmérséklet-változás sebességét a $t = 5$ s-ben!

B

422. Az oldatban a kristályok tömege $m = \sqrt{t^2 + 5t}$ függvény szerint változik, ahol m a kristályok tömege grammokban, t az idő órákban. Határozd meg a kristály tömege növekedésének sebességét a kristályosodás kezdete után 4 órával!

423. Egy test egyenes vonalú mozgását az $s(t) = 2 + 8t - t^2$ függvény írja le, ahol az s-t méterben, a t-t másodpercben mérjük. Mekkora utat tesz meg a megállásig?

424. Egy test egyenes vonalúan mozog az $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ függvény szerint, ahol az s-t méterben, a t-t másodpercben mérjük. Melyik pillanatban lesz a test sebessége maximális?

425. Egy gömb az $x(t) = 2\sin 3t$ törvény szerint rezeg. Bizonyítsd be, hogy a gömb gyorsulása arányos az x koordinátával!

426. Egy test egyenes vonalúan mozog az $s(t) = \sqrt{t}$ törvény szerint. Bizonyítsd be, hogy a test gyorsulása arányos sebességének köbével!

427. Egy karácsonyfadíszeket gyártó cég által egy nap alatt előállított termékek mennyiségét a $V(t) = \frac{5}{6}t^3 + 7\frac{1}{2}t^2 + 50t + 37$ összefüggés írja le, ahol $t \in [1; 8]$. Számítsd ki a cég óránkénti teljesítményét!

428. Egy drót keresztmetszetén a t pillanatban $q(t) = 5\sqrt{2t + 5}$ töltés halad át, ahol a q-t coulombban, az időt másodpercben mérjük. Határozd meg az áramerősséget a $t = 10$ másodpercben!

429. Egy drót keresztmetszetén a t pillanatban $q(t) = \ln(t + 1)$ töltés halad át, ahol q-t coulombban, az időt másodpercben mérjük. Melyik pillanatban lesz az áramerősség 0,1 A?

430. Egy test az $s(t) = 6t - t^2$ függvény szerint egyenes vonalúan mozog, ahol az utat méterben, az időt pedig másodpercben mérjük. Határozd meg: a) a test pillanatnyi sebességét a következő időpontokban: $t_1 = 1$ s; $t_2 = 2$ s; b) a test mozgási (kinetikus) energiáját a mozgás megkezdése után 5 másodperccel, ha a test tömege 2 g!

431. Egy test $s(t) = t^3 + 3t^2$ függvény szerint egyenes vonalúan mozog, ahol az utat méterben, az időt pedig másodpercben mérjük. Határozd meg: a) a test pillanatnyi gyorsulását a $t = 1$ s időpontban; b) a testre ható erőt a mozgás megkezdése után 3 másodperccel, ha a test tömege 5 g!

432. Egy test $s(t) = 6 + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3$ függvény szerint egyenes vonalúan mozog, ahol az utat méterben, az időt pedig másodpercben mérjük. Melyik pillanatban lesz a test sebessége maximális? Mekkora lesz a test mozgási energiája maximális sebesség esetén?

433. Egy $v_0 = 40$ m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobott test a $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ törvény szerint mozog, ahol h a megtett távolság méterben, t az idő másodpercben mérve, $g \approx 10$ m/s^2 a nehézségi gyorsulás. Határozd meg:
a) a test sebességét a feldobás utáni 2. másodpercben;
b) azt a pillanatot, amikor a test sebessége 0;
c) azt a legnagyobb távolságot, ameddig felrepülhet a test!

Ismétlő feladatok

434. Bontsd tényezőkre az alábbi polinomot:
a) $x^6 + 2x^3 + 1$; b) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$!

435. Határozd meg azon egész számok átlagát, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:
a) $10 \leqslant x \leqslant 50$; b) $-10 \leqslant x \leqslant 50$!

436. Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4! \end{cases}$

3. számú önálló munka

1. változat

1. Határozd meg az $f(x) = x^3 + 3x^2$ függvény kritikus pontjait!

2. Végezd el az $f(x) = 3x - x^3$ függvény teljes vizsgálatát, és ábrázold a grafikonját!

3. Egy test egyenes vonalúan mozog az $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 8t^2$ törvény szerint. Határozd meg a test pillanatnyi sebességét és gyorsulását a $t = 3$ s időpontban!

2. változat

1. Határozd meg az $f(x) = 3x^2 - x^3$ függvény kritikus pontjait!

2. Végezd el az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény teljes vizsgálatát, és ábrázold a grafikonját!

3. Egy test egyenes vonalúan mozog az $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2$ törvény szerint. Határozd meg a test pillanatnyi sebességét és gyorsulását a $t = 3$ s időpontban!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mely pontokat nevezzük kritikus pontoknak?
2. Mely feltétel mellett növekvő a függvény egy adott intervallumon?
3. Mely feltétel mellett csökkenő a függvény egy adott intervallumon?
4. Mi a maximum, a minimum, az extrémum?
5. Hogyan kell meghatározni a függvény lokális maximumát, lokális minimumát?
6. Hogyan kell meghatározni a függvény adott intervallumon vett legkisebb, legnagyobb értékét?
7. Mi a derivált geometriai értelmezése?
8. Mi a derivált fizikai értelmezése?
9. Mely feladatok oldhatók meg a derivált alkalmazásával?

Matematikatörténeti adalékok

A derivált fogalmát a függvény fogalmával szinte egyszerre vezetjük be, annak ellenére, hogy e fogalmak kialakulásához szükséges óriási ismeretanyag hosszú évszázadok alatt gyűlt össze. Már Arkhimédész is foglalkozott a spirálhoz húzható érintő egyenletével, és a kifejezések legnagyobb értékének kiszámításával, amit most már deriválttal oldunk meg. Fermat meg tudta határozni az egyváltozós polinomok deriváltjait, és több szélsőérték-feladatot

is megoldott. A XVII. század néhány matematikusa elég közel került a derivált fogalmához. A derivált fogalmát egymástól függetlenül, különböző megközelítésből két tudós vezette be: az angliai Isaac Newton (1643–1727) és a német Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Newton a fizika szükségleteiből indult ki és a deriváltat mint sebességet vizsgálta, Leibniz derivált alatt a függvény grafikonjához húzott érintő iránytangensét értette. Ő gyakran nem a derivált fogalmát alkalmazta, hanem a dx és dy differenciálokat, a függvény és az argumentum végtelen kicsiny növekményeit. Jelölésében a függvény deriváltja a $\frac{dy}{dx}$ arány. A differenciál szó a latin *differentia* szóból ered, melynek jelentése különbség. Innen ered a *differenciálszámítás* elnevezés. Newton hamarabb bevezette a derivált fogalmát, viszont munkáit később publikálta, mint Leibniz. Mivel Newton és Leibniz egymástól függetlenül, különböző megközelítésből jutott el a derivált fogalmáig, így mindkettőjüket a differenciálszámítás megalkotójaként tartjuk számon.



Augustin Cauchy



Karl Weierstrass

A differenciálszámítás fejlődéséhez Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Bernard Bolzano ismert matematikusok járultak hozzá. Viszont a differenciálszámítás pontos és korrekt megalapozását Augustin Cauchy (1789–1857) és Karl Weierstrass (1815–1897) fektette le.

A 2. fejezet összefoglalása

A b számot az $f(x)$ függvény $x = a$ pontbeli *határértékének* nevezzük, ha bármilyen kicsi ε-ra létezik olyan δ szám, hogy az $(a - \delta; a + \delta)$ intervallum bármely x értékére, esetleg kivéve az $x = a$ számot, teljesül az $|f(x) - b| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban, akkor ebben a pontban az $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$ és $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ függvénynek is van határértéke, és teljesülnek a következő egyenlőségek:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, ha $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

A függvény *folytonos* az x_0 pontban, ha a függvénynek ebben a pontban létezik határértéke és ez a határérték egyenlő a függvény x_0 pontbeli helyettesítési értékével.

Az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli *deriváltjának* nevezzük a függvény x_0 pontbeli növekménye és az argumentum növekménye hányadosának határértékét, ha az argumentum növekménye nullához tart:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Differenciálási szabályok, elemi függvények deriváltjai

$C'=0$	$(x^a)'=ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)'=Cu'$	$(\sin x)'=\cos x$	$(e^x)'=e^x$
$(u+v)'=u'+v'$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

Ha $y=f(u)$, ahol $u=h(x)$, akkor $y'=y'_u\cdot u'$.

$y'=k=\operatorname{tg}\alpha$ – a derivált geometriai értelmezése.

$v=s'(t)$; $a(t)=v'(t)$ – a derivált mechanikai értelmezése.

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ – a függvény grafikonjához húzott érintő egyenlete.

Ha egy függvény deriváltja az adott intervallum minden pontjában pozitív, akkor a függvény ezen az intervallumon növekvő.

Ha egy függvény deriváltja az adott intervallum minden pontjában negatív, akkor a függvény ezen az intervallumon csökkenő.

Ha egy függvény deriváltja az adott intervallum minden pontjában nulla, akkor a függvény ezen az intervallumon állandó.



A végtelenül kicsiny mennyiségek analízisének feltalálása, azaz a differenciálszámítás és az integrálszámítás valóban az egyik legnagyobb felfedezés, amire az emberi lélek géniusza valaha is képes volt.

Volodimir Levickij

3 Az integrál és alkalmazása

A FEJEZET TÉMAKÖREI

- A primitív függvény és tulajdonságai.
- Alapintegrálok táblázata. A primitív függvény meghatározása.
- A primitív függvény és a grafikon alatti síkrész területe.
- Határozott integrál és geometriai értelmezése.
- Newton–Leibniz-képlet.
- Síkidomok területének kiszámítása.
- Az integrálszámítás gyakorlati alkalmazásai

13. §. Primitív függvény

Eddig a függvény differenciálásával foglalkoztunk. De nem kevésbé fontos a differenciálás fordított művelete.

Legyen az $F(x)$ függvény olyan, hogy egy adott intervallum minden x pontjában teljesüljön az $F'(x) = f(x)$ egyenlőség. Ebben az esetben $f(x)$ az $F(x)$ függvény *deriváltja*, az $F(x)$ pedig az $f(x)$ függvény *primitív függvénye* (*primitívje*).

Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény *primitív függvényének* nevezzük az I intervallumon, ha az intervallum minden x elemére $F'(x) = f(x)$.

Eddig az $F(x)$ függvény ismeretében meg tudtuk határozni a deriváltját, az $f(x)$ függvényt. Ezt az eljárást, mint ahogy már tudjátok, *differenciálásnak* nevezzük. Az $f(x)$ függvény ismeretében a primitívjének, az $F(x)$ függvénynek a meghatározását a differenciálás fordított műveletének, *integrálásnak* nevezzük.

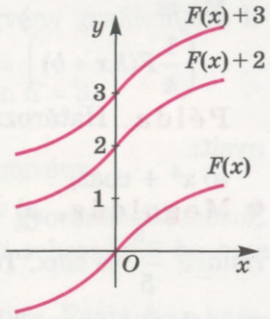
Példák.

Az x^2 függvény a $2x$ függvény primitív függvénye, mert $(x^2)' = 2x$.

Az x^3 függvény a $3x^2$ függvény primitív függvénye, mert $(x^3)' = 3x^2$.

A $\sin x$ függvény a $\cos x$ függvény primitív függvénye, mert $(\sin x)' = \cos x$.

Csak az x^2 függvény lehet a $2x$ függvény primitív függvénye? Nem. Mivel $(x^2 + 3)' = 2x$, $(x^2 - 5)' = 2x$ és így tovább. Tehát az $x^2 + 3$, $x^2 - 5$, $x^2 + \sqrt{3}$ függvények mindegyike primitív függvénye a $2x$ függvénynek. Általánosítva, **ha $F'(x) = f(x)$ és C tetszőleges szám, akkor az $f(x)$ függvény összes primitív függvénye $F(x) + C$ alakú.** Ez a primitív függvény alaptulajdonsága. Ennek a tulajdonságnak mértani értelmezése azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény összes primitív függvénye az y tengellyel történő párhuzamos eltolással fedésbe hozható (56. ábra). A továbbiakban C-vel tetszőleges valós számot fogunk jelölni.



56. ábra

Az elemi függvények deriváltjainak (64. old.) felhasználásával összeállítottuk az alapintegrálok táblázatát. Ajánljuk a táblázat megjegyzését.

$f(x)$	k (állandó)	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	a^x	e^x
$F(x)$	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$e^x + C$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$F(x)$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$2\sqrt{x} + C$

A táblázatot igazolhatjuk, ha a második oszlopban lévő függvényeket lederiváljuk. A táblázat segítségével azonnal leírhatjuk, hogy az x^8 függvény primitív függvénye az $\frac{1}{9}x^9 + C$ függvény stb.

Vezessünk le néhány, a differenciálási szabályokhoz hasonló szabályt integrálásra, melyek megkönnyítik a primitív függvény meghatározását.

I. Ha $F(x)$ és $G(x)$ rendre az $f(x)$ és $g(x)$ függvény primitív függvénye, akkor $F(x) + G(x)$ az $f(x) + g(x)$ függvény primitív függvénye.

Valóban, ha $F'(x) = f(x)$ és $G'(x) = g(x)$, akkor $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

II. Ha $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye és k tetszőleges szám, akkor $kF(x)$ a $kf(x)$ függvény primitív függvénye.

Azaz $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

III. Ha $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye, k és b tetszőleges szám ($k \neq 0$), akkor $\frac{1}{k}F(kx+b)$ az $f(kx + b)$ függvény primitív függvénye.

Mivel

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b) = \frac{1}{k}\cdot kf(kx+b) = f(kx+b).$$

Példa. Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit:

a) $x^4 + \cos x$; b) $5\sin x$; c) $(7x + 2)^3$!

● **Megoldás.** a) Az x^4 és a $\cos x$ függvény primitív függvénye rendre $\frac{x^5}{5}$ és $\sin x$. Tehát ezen függvények összege primitív függvényének általános alakja $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C$.

b) A II. szabály szerint $F(x) = -5\cos x + C$.

c) A $(7x + 2)^3$ függvény egyik primitív függvénye a III. szabály szerint az $\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+2)^4}{4}$ függvény. Ezért az adott függvény primitív függvényének általános alakja: $F(x) = \frac{1}{28}(7x+2)^4 + C$.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a differenciálás?
2. Minek nevezzük a differenciálás fordított műveletét?
3. Mi egy függvény primitív függvénye?
4. Mi az ax^n egytagú kifejezéssel megadott függvény primitív függvénye?
5. Fogalmazd meg a két függvény összegének primitív függvényéről szóló tételt!

Közös munka

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^5 + 2x - 4$ függvény primitív függvényét!

● **Megoldás.** $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{2}x^2 - 4x + C = \frac{1}{6}x^6 + x^2 - 4x + C$.

2. Bizonyítsuk be, hogy az $F(x) = 2\sin x + 3x$ függvény az $f(x) = 2\cos x + 3$ függvény primitív függvénye!

● **Bizonyítás.** $F'(x) = (2\sin x + 3x)' = 2\cos x + 3 = f(x)$.

Tehát $F'(x) = f(x)$. Így a meghatározás szerint az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye.

3. Határozzuk meg az $y = x$ függvény azon primitív függvényét, amely áthalad a $P(2; 5)$ ponton!

● **Megoldás.** Az $F(x) = \frac{x^2}{2}$ függvény az $y = x$ függvény egyik primitív függvénye. Az összes primitív függvény általános alakja: $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Mivel a keresett primitív függvény grafikonjára illeszkedik a $P(2; 5)$ pont, ezért $5 = \frac{2^2}{2} + C$, innen $C = 3$.

Felelet: $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ a keresett primitív függvény.

4. Egy test egyenes vonalúan, $a(t) = 2$ m/s^2 gyorsulással mozog. Határozzuk meg ennek a testnek a t pontbeli sebességét, ha az a $t = 0$ pillanatban 3 m/s volt!

● **Megoldás.** A gyorsulás a sebesség deriváltja. Ezért, ha a keresett sebességet $v(t)$-vel jelöljük, akkor $v'(t) = 2$. Tehát a $v(t)$ függvény a 2 (konstans) függvény primitív függvénye, ezért $v(t) = 2t + C$. Mivel $v(0) = 3$, ezért $3 = 2 \cdot 0 + C$, $C = 3$.

Felelet: $v(t) = 2t + 3$.

Szóbeli feladatok

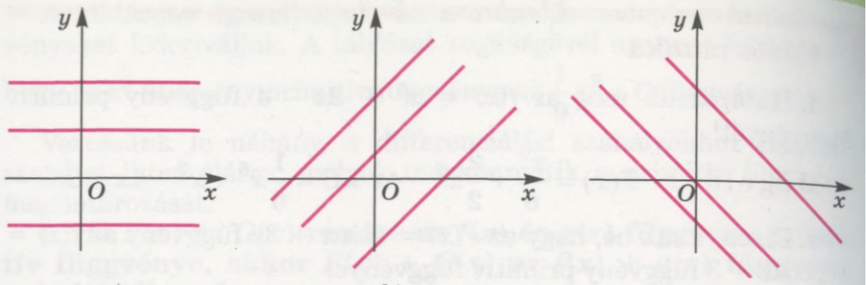
Határozd meg a függvény primitív függvényét (**437–439.**)!

437. a) $f(x) = x^9$; b) $f(x) = x$; c) $f(x) = x^3$; d) $f(x) = x^{0,5}$.

438. a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = 0$; c) $f(x) = 5$; d) $f(x) = \cos x$.

439. a) $f(x) = 0{,}5^x$; b) $f(x) = e^x$; c) $f(x) = x^{-2}$; d) $f(x) = -0{,}1$.

440. Az 57. ábra melyik rajzán látható az $y = 1$ függvény három primitív függvénye?



a) b) c)

57. ábra

441. Az alábbi állítások közül melyik igaz:

a) egy függvény két különböző primitív függvénye illeszkedik egymásra;

b) egy függvény két különböző primitív függvénye metszi egymást;

c) egy függvény két különböző primitív függvénye egybevágó görbe?

442. Melyik függvényre igaz, hogy a deriváltfüggvénye egyben a primitív függvénye is?

A

443. Bizonyítsd be, hogy az x^4 függvény primitív függvénye a $4x^3$ függvénynek! Igaz-e, hogy az $x^4 - 5$ függvény a $4x^3$ függvény primitív függvénye?

444. Határozd meg a $4x^3$ függvény négy különböző primitív függvényét!

445. Bizonyítsd be, hogy a $0{,}5x^2 + x$ függvény primitív függvénye az $x + 1$ függvénynek!

446. Add meg az $x + 1$ függvény primitív függvényének általános alakját!

447. Bizonyítsd be, hogy a $\cos x$ függvény primitív függvénye a $\sin x$ függvénynek!

Írd le a függvény primitív függvényének általános alakját (**448–450.**)!

448. a) $f(x) = 3$; b) $f(x) = 0$; c) $f(x) = 3x^2$; d) $f(x) = 4x^3$.

449. a) $f(x) = -5x^4$; b) $f(x) = -2x$;
c) $f(x) = x^3 - e^x$; d) $f(x) = -x^5 + e^x$.

450. a) $f(x) = x^3 + 2x$; b) $f(x) = x^6 - 4$;
c) $f(x) = 2 + \cos x$; d) $f(x) = 3 - \sin x$.

Határozd meg a függvény primitív függvényét (**451–453.**)!

451. a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = 5$; c) $f(x) = x^{100}$; d) $f(x) = -3$.

452. a) $f(x) = 5^x$; b) $f(x) = 10^x$; c) $f(x) = x^{-1}$; d) $f(x) = \pi$.

453. a) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; b) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; c) $y = \frac{1}{x^3}$; d) $y = \frac{1}{x^{10}}$.

454. Határozd meg az alábbi függvények primitív függvényeit:

a) $f(x) = 5 + 3x^2$; b) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 7$;

c) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$; d) $f(x) = (x - 2)^2$!

455. Határozd meg az $f(x)$ függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, melyre:

a) $f(x) = 1 + x^2$ és $F(-1) = 2$; b) $f(x) = 3x - 7$ és $F(0) = 12$!

B

456. Bizonyítsd be, hogy az $y = 2x^4 + x$ függvény primitív függvénye az $y = 8x^3 + 1$ függvénynek!

457. Bizonyítsd be, hogy az $y = e^x + ex$ függvény primitív függvénye az $y = e^x + e$ függvénynek!

458. Bizonyítsd be, hogy az $y = 0{,}75x\sqrt[3]{x}$ függvény primitív függvénye az $y = \sqrt[3]{x}$ függvénynek!

459. Bizonyítsd be, hogy az $y = 1 + 2\cos x$ függvény primitív függvénye az $y = 2\sin x$ függvénynek! Ábrázold közös koordinátarendszerben az $y = 2\sin x$ függvény két különböző primitív függvényét!

460. Bizonyítsd be, hogy a $2\sqrt{x}$ függvény az $\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény egyik primitív függvénye!

461. Bizonyítsd be, hogy a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon az $1 + \operatorname{tg} x$ függvény az $\frac{1}{\cos^2 x}$ függvény egyik primitív függvénye!

Határozd meg a függvény primitív függvényének általános alakját (**462–464.**)!

462. a) $y = 1 + x^9$; b) $y = 5 - x$; c) $y = 2x^3$; d) $y = -0{,}5x^5$.

463. a) $y = 2\sin x$; b) $y = \sin 3x$; c) $y = \cos 7x$; d) $y = 5 + \cos x$.

464. a) $y = 0{,}5^{2x}$; b) $y = e^{-x}$; c) $y = (3x)^{-2}$; d) $y = 5 + x^{-1}$.

465. Melyik függvény primitív függvénye a: a) $3x^5$; b) $2\cos x$ függvény?

466. Határozd meg az $f(x)$ függvény azon primitív függvényét, melyre illeszkedik a P pont:

a) $f(x) = 1 + x^2$, $P(-3; 9)$; b) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $P(0; -3)$!

467. Határozd meg az $f(x)$ függvénynek azt az $F(x)$ primitív függvényét, melyre:

a) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(2) = 3$;

c) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$; d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 2$!

468. Egy egyenes vonalúan mozgó test gyorsulása $a(t)$, és t_0 pillanatban a sebessége v_0. Határozd meg a test sebességét az idő függvényében, ha:

a) $a(t) = 8t$, $t_0 = 5$ s, $v_0 = 120$ m/s;

b) $a(t) = 8$, $t_0 = 3$ s, $v_0 = 30$ m/s!

469. Egy egyenes vonalúan mozgó test sebessége $v(t)$, és a t_0 pillanatban a test által megtett út s_0. Határozd meg a test által megtett utat az idő függvényében, ha:

a) $v(t) = 3t^2$, $t_0 = 2$ s, $s_0 = 12$ m;

b) $v(t) = 2\sin t$, $t_0 = \pi$ s, $s_0 = 2$ m!

470. Bizonyítsd be, hogy az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye:

a) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

b) $F(x) = 2\sin 3x$, $f(x) = 6\cos 3x$, $x \in R$;

c) $F(x) = 4 + \operatorname{tg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$!

471. Igaz-e, hogy az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye:

a) $F(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \in (0; \infty)$;

b) $F(x) = 3 - x^4$, $f(x) = 3x - 0{,}2x^5 + C$, $x \in R$;

c) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 7$, $f(x) = -\frac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty; 0)$?

Határozd meg a függvény primitív függvényét (**472–477.**)!

472. a) $f(x) = 8e^x$; b) $f(x) = e^{2-3x}$; c) $f(x) = 2e^{5x-1}$.

473. a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; b) $f(x) = 3^{-5x}$; c) $f(x) = 5 \cdot 2^{3x-1}$.

474. a) $y = 2\sin 7x\cos 7x$; b) $y = 2\sin^2 x - 1$.

475. a) $y = \sin^2 5x - \cos^2 5x$; b) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 3x$.

476. a) $y = \sin 2x\cos 13x - \cos 2x\sin 13x$; b) $y = 1 + \operatorname{tg}^2 3x$.

477. a) $y = \cos 3x\cos 7x + \sin 3x\sin 7x$; b) $y = 2\cos^2 x$.

Ismétlő feladatok

478. Határozd meg az $y = 1 - \sin x$ függvény extrémumait!

479. Határozd meg az alábbi függvények grafikonjainak metszéspontját:

a) $y = x^2 + 3$ és $y = 4x$; b) $y = \sqrt{x}$ és $y = 0{,}5x - 4$!

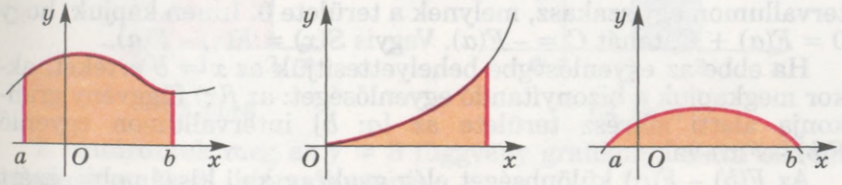
480. Az első tartályban 400 l benzin van, a másodikban 900 l. Óránként az elsőből 20 liter, a másodikból 10 liter benzint

engedtek le. Hány óra múlva lesz az első tartályban 4-szer kevesebb benzin, mint a másodikban?

14. §. A grafikon alatti síkrész területe

Integrálással olyan alakzatok területét lehet meghatározni, melyet az integrálás fogalma nélkül nagyon nehéz lenne kiszámítani.

Vegyük az $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos $f(x)$ függvényt, amely ezen az intervallumon csak pozitív értéket vesz fel. A görbe, az abszcisszatengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenes által határolt síkrészt az $f(x)$ *függvény grafikonja alatti síkrésznek* nevezzük az $[a; b]$ intervallumon. Néhány ilyen grafikon alatti síkrész látható az 58. ábrán. A grafikon alatti síkrészt *görbe vonalú trapéznak* is nevezik.

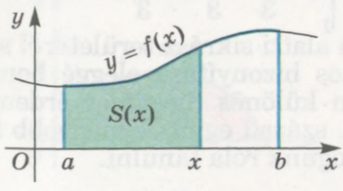


58. ábra

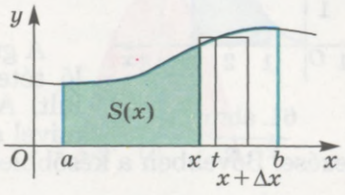
A grafikon alatti síkrész területét integrálással lehet meghatározni.

5. tétel. ***Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területe egyenlő az $F(b) - F(a)$ kifejezés értékével, ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye az $[a; b]$ intervallumon.***

●**Bizonyítás.** Vizsgáljuk az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrészt az $[a; b]$ intervallumon (59. ábra).



59. ábra



60. ábra

Legyen x az $[a; b]$ intervallum tetszőleges pontja, ekkor jelölje $S(x)$ a függvény grafikonja alatti síkrész területét az $[a; x]$ intervallumon. Nyilvánvaló, hogy $S(x)$ függ x értékétől, tehát az x függvénye. Bebizonyítjuk, hogy $S'(x) = f(x)$. Vegyük az x argumentum Δx változását (60. ábra), ekkor a függvény növekménye $S(x + \Delta x) - S(x)$. Ez az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész te-

rülete az $[x; x + \Delta x]$ intervallumon. Ami megközelítőleg egyenlő egy olyan téglalap területével, melynek az alapja Δx hosszúságú, a magassága pedig $f(t)$, ahol t az $[x; x + \Delta x]$ intervallum egyik tetszőleges pontja.

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \Delta x \cdot f(t), \text{ innen } \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(t).$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $t \to x$ és $f(t) \to f(x)$. Azaz

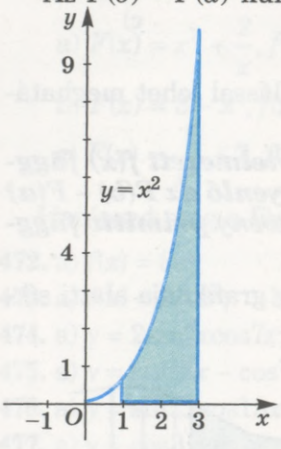
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ ezért } S'(x) = f(x).$$

Mint láthatjuk, az $S(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye. És ha $F(x)$ az $f(x)$ függvény egy másik primitív függvénye, akkor $S(x) = F(x) + C$, valamely C számra. Ahhoz hogy meghatározzuk a C értéket, vegyük figyelembe, hogy $S(a) = 0$, mert ha $x = a$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész az $[a; x]$ intervallumon egy szakasz, melynek a területe 0. Innen kapjuk, hogy $0 = F(a) + C$, tehát $C = -F(a)$. Vagyis $S(x) = F(x) - F(a)$.

Ha ebbe az egyenlőségbe behelyettesítjük az $x = b$ értéket, akkor megkapjuk a bizonyítandó egyenlőséget: az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területe az $[a; b]$ intervallumon egyenlő $F(b) - F(a)$-val.

Az $F(b) - F(a)$ különbséget elég gyakran kell kiszámolni, ezért célszerűbb jelölést használunk rá:

$$F(x)\Big|_a^b.$$



61. ábra

Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja alatti területet az $[1; 3]$ intervallumon!

● **Megoldás.** Az x^2 függvénynek primitív függvénye az $\frac{x^3}{3}$ függvény (61. ábra).

Ezért a keresett terület

$$S = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ (n. e.)}.$$

A grafikon alatti síkrész területéről szóló tétel pontos bizonyítása eléggé bonyolult. Azonban különös figyelmet érdemel, mivel a XVII. század egyik legnagyobb felfedezése. Bővebben a későbbiekben fogunk róla tanulni.

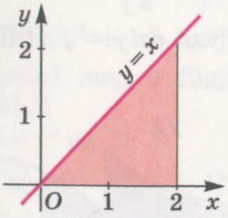
ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a grafikon alatti síkrész? Hogyan nevezzük másképpen?
2. Fogalmazd meg a grafikon alatti síkrész területéről szóló tételt!
3. Mivel egyenlő az $y = x$ függvény grafikonja alatti síkrész területe a $[0; 1]$ intervallumon?
4. Mivel egyenlő az $y = 2$ függvény grafikonja alatti síkrész területe a $[0; 2]$ intervallumon?

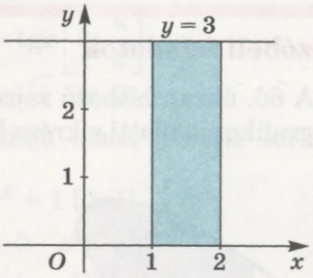
Közös munka

1. Határozzuk meg az $y = x$ függvény grafikonja alatti síkrész területét a [0; 2] intervallumon!

● **Megoldás.** A függvény grafikonja alatti síkrész egy egyenlő szárú háromszög, melynek befogói 2 egység hosszúak (62. ábra). A területe: $S = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (n. e.).



62. ábra



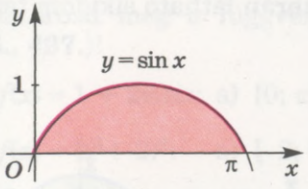
63. ábra

2. Határozzuk meg az $y = 3$ függvény grafikonja alatti síkrész területét az [1; 2] intervallumon!

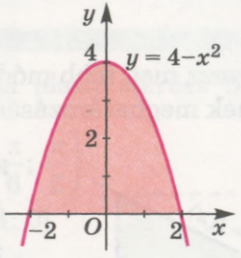
● **Megoldás.** A függvény grafikonja alatti síkrész egy téglalap, mely oldalainak hossza 1 és 3 egység (63. ábra). Ennek a téglalapnak a területe $S = 1 \cdot 3 = 3$ (n. e.).

3. Határozzuk meg az $y = \sin x$ függvény grafikonja alatti síkrész területét a [0; π] intervallumon!

● **Megoldás.** A $\sin x$ függvény primitív függvénye a $-\cos x$ függvény, mivel $(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$. Ezért a keresett terület (64. ábra): $-\cos x\Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$ (n. e.).



64. ábra



65. ábra

4. Határozzuk meg az $y = 4 - x^2$ függvény grafikonja és az abszcisszatengely által határolt síkrész területét!

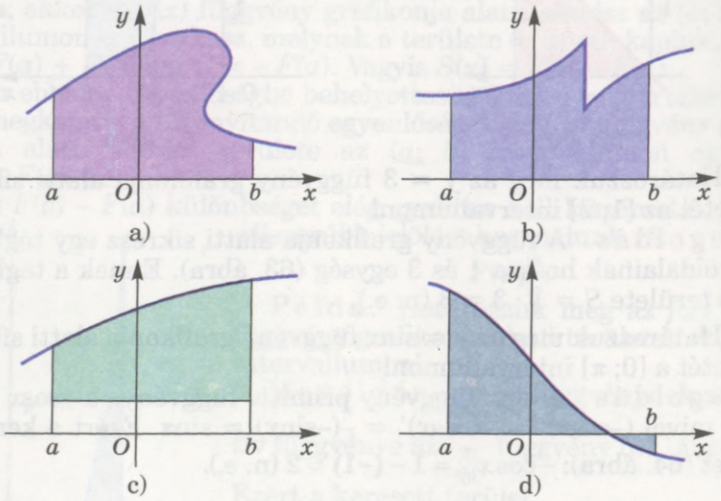
● **Megoldás.** Határozzuk meg a függvény grafikonjának és az abszcisszatengely metszéspontjának abszcisszáját (65. ábra)! Ezen pontok ordinátája nulla: $0 = 4 - x^2$, így $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. Tehát meg kell határozni az $y = 4 - x^2$ függvény grafikonja alatti síkrész

területét a [–2; 2] intervallumon. Ennek a függvénynek primitív függvénye az $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$ függvény. Ezért a keresett terület:

$$S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3} \text{ (n. e.)}.$$

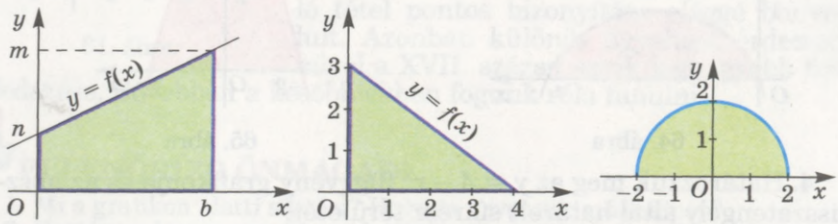
Szóbeli feladatok

481. A 66. ábrán látható rajzok melyikén van az $y = f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész besatírozva?



66. ábra

482. Nevezz meg több módszert a 67. ábrán látható síkidom területének meghatározására!



67. ábra 68. ábra 69. ábra

483. A 68. ábra alapján határozd meg az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területét a [0; 4]; [2; 4]; [0; 2] intervallumon!

484. A 69. ábra alapján határozd meg az $y = \sqrt{4 - x^2}$ függvény grafikonja alatti síkrész területét a [–2; 2]; [0; 2] intervallumon!

A

Ábrázold a függvény grafikonja alatti síkrészt az adott intervallumon **(485–487.)**!

485. a) $f(x) = x^2$ [1; 2]; b) $f(x) = 0{,}2x^3$ [0; 3].

486. a) $f(x) = \sin x \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

487. a) $f(x) = x^2 + 1$ [–1; 2]; b) $f(x) = \sqrt{x}$ [0; 5].

Határozd meg a függvény grafikonja alatti síkrész területét **(488–491.)**!

488. a) $y = x^3$ [0; 2]; b) $y = x^3 + 1$ [0; 1].

489. a) $f(x) = x^2 + 3$ [–1; 1]; b) $f(x) = 5 - x^2$ [–1; 2].

490. a) $f(x) = x(x + 4)$ [0; 3]; b) $f(x) = (x - 1)^2$ [–2; 0].

491. a) $f(x) = \sin x$ [0; π]; b) $f(x) = 2\sin x \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

492. Határozd meg a **485–487.** példákban ábrázolt síkrészek területét!

Határozd meg a függvény grafikonja alatti síkrész területét **(493–495.)**!

493. $f(x) = x^2 + 3$: a) [0; 2]; b) [–2; 0].

494. $f(x) = \cos x$: a) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

495. $f(x) = x^3 + 1$: a) [0; 2]; b) [–1; 1].

B

Határozd meg a függvény grafikonja alatti síkrész területét **(496., 497.)**!

496. $f(x) = 1 + 2\sin x$: a) [0; π]; b) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

497. $f(x) = (x + 2)^4$: a) [–2; 0]; b) [–1; 0].

498. Számítsd ki az $y = 3 + \frac{x}{2}$ függvény grafikonja alatti síkrész területét a [2; 6] intervallumon kétféleképpen!

Határozd meg az alábbi görbékkel határolt síkrész területét **(499–501.)**!

499. a) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$ és $x = 0$;

b) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{\pi}{2}$.

500. a) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = -3$; b) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

501. a) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^x$; b) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^{-x}$.

502. Határozd meg az $y = 3 + 2x - x^2$ függvény grafikonjával és az abszcisszatengellyel határolt síkrész területét!

503. Határozd meg az $y = 3 - 2x - x^2$ függvény grafikonja és az abszcisszatengely által határolt síkrész területét!

Határozd meg a függvények grafikonjai és az egyenesek által határolt síkrész területét (**504–507.**)!

504. a) $y = x^3$, $y = 10 - x$, $y = 0$; b) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

505. a) $y = -x^3$, $y = 5 + 4x$, $y = 0$; b) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 4$.

506. a) $y = 4 - x^2$ és $y = x + 2$; b) $y = x^2$ és $y = 2x$.

507. a) $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$; b) $y = \cos x$ és $y = \frac{1}{2}$.

Ismétlő feladatok

508. Határozd meg az alábbi függvények deriváltjait:
a) $y = \ln(1 + 3x)$; b) $y = xe^{-x}$; c) $y = \sqrt{x^2 - x}$; d) $y = \cos 2x$!

509. Oldd meg a következő egyenleteket:
a) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$;
b) $\ln(x + 3) + \ln 2 = 2\ln x - \ln(x - 4)$!

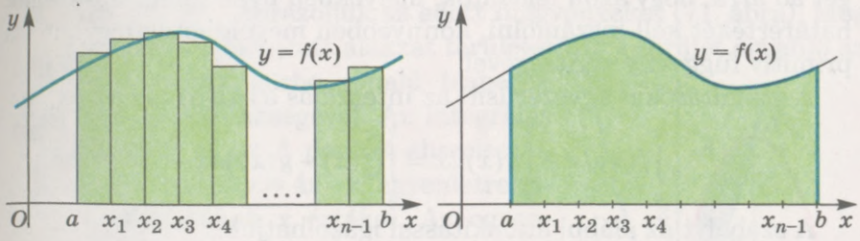
510. Egy osztályban 40 tanuló van. Az első félév végén matematikából 4 tanuló 12-es osztályzatot kapott, ketten 10-est, tízen 9-est, öten 7-est, a többiek 6-ost. Ábrázold oszlopdiagramon és kördiagramon is az osztály előmenetelét!

15. §. Az integrál

Most nézzünk egy másik módszert a függvény grafikonja alatti síkrész területének meghatározására.

Vegyük az $[a; b]$ intervallumon adott $f(x)$ függvényt (70. ábra). Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ pontokkal n egyenlő részre: $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; b]$. Rajzoljunk az első szakaszra $f(x_1)$ magasságú téglalapot, a másodikra $f(x_2)$ magasságú téglalapot és így tovább. Végül rajzoljunk $f(b)$ magasságú téglalapot az n-edik kis intervallumra. Egy lépcsős sokszöget kapunk, ami n

téglalapból áll. Ha minden ilyen téglalap alapja Δx hosszú, akkor a lépcsős sokszög területe $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b)$.



70. ábra

Az ilyen összeget az $f(x)$ *függvény* $[a; b]$ *intervallumon vett integrálösszegének* nevezzük. Ez az összeg az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területének közelítő értéke. Ha n tart a végtelenhez, akkor S_n tart a függvény grafikonja alatti síkrész területének pontos értékéhez. Így írjuk:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Nemcsak a függvény alatti síkrész területének meghatározása, hanem a gyakorlati matematika számos más érdekes és fontos feladata is visszavezethető ilyen integrálösszegek kiszámítására. Épp ezért külön szimbólumot vezettek be ennek a fogalomnak a jelölésére. Az ilyen S_n integrálösszegek határértékét abban az esetben, ha n végtelenül nő, *az $f(x)$ függvény a-tól b-ig vett integráljának nevezzük.* Jelölése: $\int_a^b f(x)dx$ (így olvassuk: integrál a-tól b-ig ef iksz dé iksz). Ebben az esetben *a és b az integrál határa,* $\int$ *az integrál jele, $f(x)$ az integrandus, x az integrálás változója.* Tehát

$$\lim_{n \to \infty} (\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ebből következik, hogy az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területe az $[a; b]$ intervallumon $\int_a^b f(x)dx$. Mivel a terület az $F(b) - F(a)$ kifejezés értékével egyenlő, ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye, ezért

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ezt a képletet *Newton–Leibniz-képletnek* nevezzük, de szokták a *matematikai analízis alapképletének* is hívni. Ez a képlet lehetőséget ad arra, hogy azon feladatok, melyekben ilyen integrálösszegek határértékét kell kiszámolni, könnyebben megoldhatók legyenek a primitív függvény segítségével.

A számításokat egyszerűsíti az integrálás alábbi szabálya:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

A szabályt az alábbi átalakítással igazolhatjuk:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) =$$

$$= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

(1646–1716)

Neves német matematikus, fizikus, filozófus, tudományos intézmények alapítója. Newtonnal osztozkodik a differenciál- és integrálszámítás felfedezését övező dicsőségében. Több, máig használatos fogalmat, jelölést, algoritmust vezetett be.



ISAAC NEWTON

(1643–1727)

Neves angol fizikus, csillagász, matematikus. A mechanika több törvényét, az általános gravitációs törvényt fedezte fel. Leibniztől függetlenül alapozta meg a matematikai analízist.

A tudományok tanulmányozásában a példák hasznosabbak, mint a szabályok.

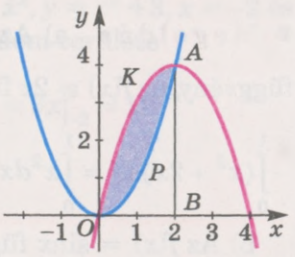
Isaac Newton

Newton volt a legnagyobb géniusza az emberiségnek.

Joseph Louis Lagrange

Feladat. Határozzuk meg az $y = x^2$ és az $y = 4x - x^2$ függvény grafikonja által határolt síkrész területét!

● **Megoldás.** Ábrázoljuk az adott függvényeket (71. ábra). Meg kell határozni a befestett alakzat területét. Ez a terület egyenlő az *OBAK* és *OBAP* görbe vonalú trapézok területeinek különbségével. Az integrálás határai az *O* és az *A* pontok abszcisszái, vagyis az $y = x^2$ és $y = 4x - x^2$ egyenletrendszer megoldásának x értékei. Az egyenletrendszerből az $x^2 = 4x - x^2$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.



71. ábra

Tehát a keresett terület

$$S = \int_0^2 (4x - x^2)dx - \int_0^2 x^2 dx =$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Felelet: $2\frac{2}{3}$ (n. e.).

Megjegyzés. Azt a fogalmat, amit ez a könyv integrálnak nevez, a felsőbb évfolyamokon a matematikai analízisben *határozott integrálnak* nevezik. Mert vizsgálják az $\int f(x)dx$ *határozatlan integrált* is, ami az $f(x)$ függvény összes primitív függvényének általános alakja:

$$\text{ha } F'(x) = f(x), \text{ akkor } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Épp ezért nevezik a primitív függvény meghatározását integrálásnak.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi az integrálösszeg? Hozz fel példákat!
2. Mit értünk az $f(x)$ függvény a-tól b-ig vett integrálján?
3. Hogyan kell olvasni az $\int_a^b f(x)dx$ kifejezést? Nevezd meg a részeit!
4. Add meg a Newton–Leibniz-képletet!
5. Mi a XVII. század egyik legnagyobb matematikai felfedezése?

Közös munka

1. Számítsuk ki a következőket: a) $\int_0^1 (x^2 + 2x)dx$; b) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$.

● **Megoldás.** a) Az $f(x) = x^2$ primitív függvénye az $F(x) = \frac{x^3}{3}$ függvény, az $f(x) = 2x$ függvényé pedig az $F(x) = x^2$. Tehát

$$\int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2x dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 + 1 - 0 = 1\frac{1}{3}.$$

b) Az $f(x) = \sin x$ függvény primitív függvénye $F(x) = -\cos x$, az $f(x) = \sin 2x$ függvény primitív függvénye pedig az $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ függvény. Ezért

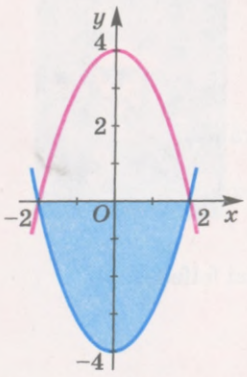
$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos 2\pi - (-\frac{1}{2}\cos 0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

2. Határozzuk meg az $y = x^2 - 4$ és az $y = 0$ görbével határolt síkrész területét!

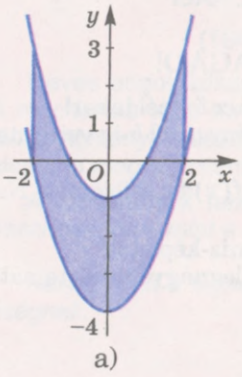
● **Megoldás.** A feladatban szereplő síkidom az x tengely alatt helyezkedik el (72. ábra), tehát nem felel meg a grafikon alatti síkrész definíciójának. Viszont tengelyesen tükrös az $y = 4 - x^2$ függvény grafikonja alatti síkrésszel a $[-2; 2]$ intervallumon. Ezeknek a síkidomoknak a területe egyenlő, ezért

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}.$$

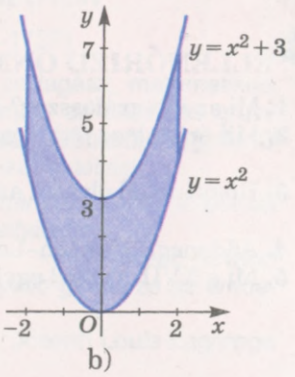
Felelet: $10\frac{2}{3}$ (n. e.).



72. ábra



a)



b)

73. ábra

3. Határozzuk meg az $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$ és $x = 2$ görbékkel határolt síkrész területét!

● **Megoldás.** A feladatban megadott síkrészt metszi az x tengely (73. *a)* ábra). Az y tengellyel párhuzamosan vigyük 4 egységgel feljebb a síkidomot. A kapott síkrészt az $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $x = -2$ és $x = 2$ görbék határolják. Tehát a kapott síkidom területe

$$S = \int_{-2}^{2} (x^2 + 3)dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx = \int_{-2}^{2} 3dx = 3x\Big|_{-2}^{2} = 12.$$

Felelet: 12 (n. e.).

Szóbeli feladatok

511. Ismeretes, hogy $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$. Határozd meg az alábbi integrálok értékét:

a) $\int_0^1 3f(x)dx$; b) $\int_0^3 f(x)dx$; c) $\int_0^3 0{,}5f(x)dx$!

512. Ismeretes, hogy $\int_{-1}^1 f(x)dx = a$ és $\int_{-1}^1 g(x)dx = b$. Határozd meg az alábbiakat:

a) $\int_{-1}^1 f(2x)dx$; b) $\int_{-1}^1 f\big((x) + g(x)\big)dx$; c) $\int_{-1}^1 5g(x)dx$!

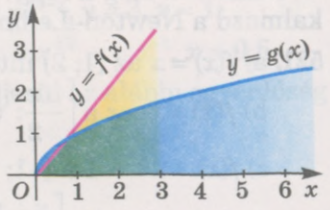
A

513. Számítsd ki az alábbi integrálok értékét:

a) $\int_0^1 xdx$; b) $\int_{-1}^1 xdx$; c) $\int_0^1 x^2 dx$; d) $\int_{-1}^1 x^2 dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; g) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; h) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$!

514. A 74. ábra alapján hasonlítsd össze a és b értékét, ha: $a = \int_1^3 f(x)dx$ és $b = \int_1^3 g(x)dx$!



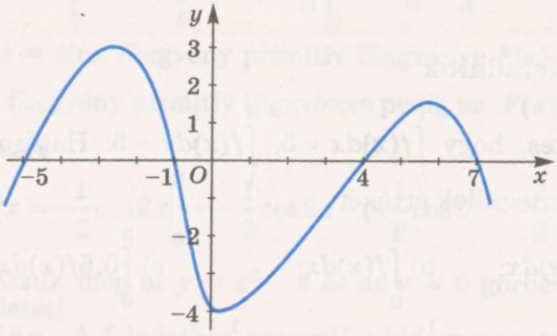
74. ábra

515. Az értékük meghatározása nélkül hasonlítsd össze nullával az alábbi integrálokat:

a) $\int_0^1 0{,}5x\,dx$; b) $\int_{-1}^0 x\,dx$; c) $\int_0^1 (1-x^2)\,dx$; d) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx$!

516. A 75. ábrán az $f(x)$ függvény grafikonja látható. Rendezd növekvő sorrendbe az a, b és c számokat, ha:

$a = \int_{-5}^{-1} f(x)\,dx$, $b = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx$, $c = \int_{4}^{7} f(x)\,dx$!



75. ábra

Számítsd ki az integrált (**517–520.**)!

517. a) $\int_0^1 2x\,dx$; b) $\int_{-1}^2 x^2\,dx$; c) $\int_0^{1{,}5} 3x^3\,dx$.

518. a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; b) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

519. a) $\int_0^2 \frac{x^3}{6}\,dx$; b) $\int_{-1}^1 (4-x^2)\,dx$; c) $\int_{-2}^0 (3x^2+1)\,dx$.

520. a) $\int_0^1 e^x\,dx$; b) $\int_0^1 2^x\,dx$; c) $\int_1^e 2x^{-1}\,dx$.

Határozd meg a függvény grafikonja alatti síkrész területét! Alkalmazd a Newton–Leibniz-képletet (**521–523.**)!

521. a) $f(x) = x$ az $[1; 2]$ intervallumon;

b) $f(x) = \cos x$ a $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ intervallumon;

c) $f(x) = x^3 + 1$ a $[-1; 1]$ intervallumon;

d) $f(x) = 2\sin x$ a $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

522. a) $f(x) = x^3$ [1; 2]; b) $f(x) = \cos 2x \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$;

c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ [1; 9]; d) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

523. a) $y = 2e^x$ [0; 1]; b) $y = 2^x$ [–1; 2];

c) $y = \frac{4}{x} + 3$ [2; 6]; d) $y = 4 - \frac{1}{x}$ [–6; –3].

B

Számítsd ki az integrált (**524–527.**)!

524. a) $\int_0^2 \frac{dx}{3x+1}$; b) $\int_0^1 (1 + \sqrt[3]{x})dx$; c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx$.

525. a) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3} dx$; b) $\int_{-3}^{-1} (2+x)^2 dx$; c) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

526. a) $\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} dx$; b) $\int_1^3 \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2} dx$; c) $\int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1} dx$.

527. a) $\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$; b) $\int_0^{\pi} 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$; c) $\int_0^{\pi} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$.

528. Igazold az alábbi azonosságokat:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$!

Határozd meg a görbékkel határolt síkrész területét (**529–531.**)!

529. a) $y = x^2$ és $y = 2x$; b) $y = x^2$ és $y = 2$;

c) $y = 6 + x - x^2$ és $y = 6 - 2x$; d) $y = 4x + x^2$ és $y = 4 + x$.

530. a) $y = 4x - x^2$ és $y = 4 - x$; b) $y = x^3$ és $y = x$;

c) $y = x^3$, $y = 8$ és $x = 1$; d) $y = 2x - x^2$ és $y = x^2$.

531. a) $y = 0{,}5^x$, $y = 1$, $x = -2$; b) $y = 3^{-x}$, $y = 3$, $x = 1$;

c) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = e$; d) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-1}$, $x = 0{,}5$.

532. Igaz-e, hogy bármely $t > 1$ értékre teljesül az alábbi egyenlőség

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln t?$$

Szemléltesd rajzon!

533. Bizonyítsd be, hogyha bármely x-re az $[a; b]$ intervallumból teljesül az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség, akkor az $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ és $y = g(x)$ görbékkel határolt síkrész területe $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$!

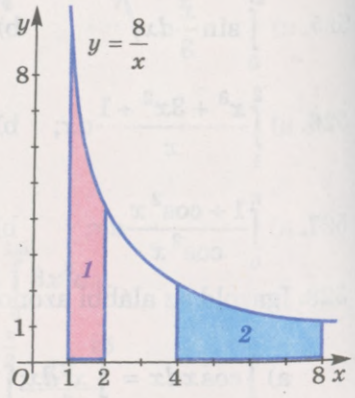
534. Bizonyítsd be, hogy:

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$;

b) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ bármely $k > 0$ értékre;

c) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ ha $a < c < b$!

535. Bizonyítsd be, hogy az 1. számú alakzat területe egyenlő a 2. számú alakzat területével (76. ábra)!



76. ábra

Határozd meg a görbék által határolt síkrész területét (**536., 537.**)!

536. $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 4x + 3$, $x = -2$, $x = 0$.

537. $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$, $x = 4$.

Ismétlő feladatok

538. Határozd meg az alábbi függvények primitív függvényét:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; b) $y = e^{-x} + x$!

539. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $0{,}5^{x^2-3x+2} = 1$; b) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$;

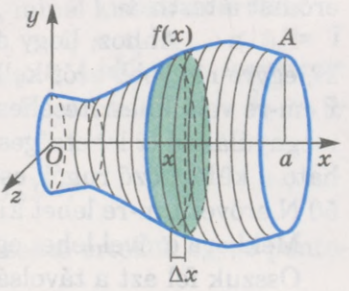
c) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$!

540. Egy család új lakást kapott egy 100 lakásos társasházban. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lakásszámukban szerepel az 5-ös számjegy?

16. §. Az integrál alkalmazása

Integrállal nemcsak az alakzatok területét lehet meghatározni, hanem más mennyiségek közelítő értékét is, melyeket a $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$ integrálösszeggel lehet kifejezni. Az ilyen összeget rövidebben $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ alakban írjuk. Minden ilyen mennyiség meghatározható az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területe kiszámításának módszerével, ezért ezen összegek határértékére is alkalmazható a Newton–Leibniz-képlet. Nézzünk három példát.

1. *Forgástestek térfogata.* Minden forgástestet úgy kell elképzelni, mintha nagyon sok körlemezből vagy nagyon sok hengerből állna, melyeknek Δx a magassága (77. ábra).

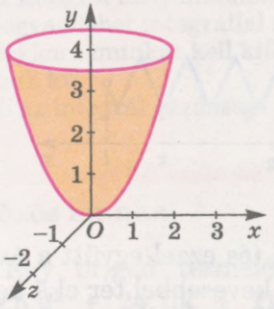


77. ábra

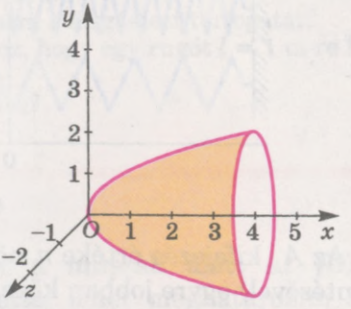
Minden ilyen henger sugara x függvénye és $f(x)$-szel egyenlő. Egy ilyen henger térfogata a megfelelő x esetén $\pi f^2(x)\Delta x$. Az egész forgástest térfogata a $\pi f^2(x_1)\Delta x + \pi f^2(x_2)\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_n)\Delta x$ összeg.

Tehát a test térfogata $V = \int_0^a \pi f^2(x)dx$ vagy $V = \pi \int_0^a f^2(x)dx$.

Példa. Meg kell határozni egy 4 dm mély edény űrtartalmát, melynek tengelymetszete az $y = x^2$ függvény grafikonja (78. ábra). x pozitív értékeire a függvény grafikonja és az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja tengelyesen tükrös az I. koordinátanegyed szögfelezőjére. Ezért az edény űrtartalma egyenlő az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja alatti síkrész x tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatával a [0; 4] intervallumon (79. ábra).



78. ábra



79. ábra

Tehát a keresett térfogat

$$V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^4 x dx = 8\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Határozott integrállal nemcsak a forgástestek térfogatát, hanem más testek térfogatát is meg lehet határozni, mint például a gúla, a csonka gúla stb.

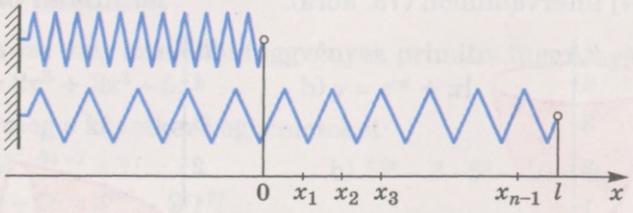
2. *A változó erő által végzett munka.* Hogyha egy testet az F állandó erő s távolságra mozdít el az erővel egy irányban, akkor $A = Fs$ munkát fejt ki. De mi van, ha nem állandó, hanem változó erő hat a testre?

Példa. Ahhoz, hogy egy rugót 1 cm-re, 2 cm-re stb. húzzunk ki, egyre nagyobb erőt kell kifejteni. Hook törvénye szerint a rugó x cm-re való kifeszítéséhez szükséges $f(x)$ erő egyenesen arányos a megnyúlással (x lehetséges értékeivel), vagyis $f(x) = kx$. A k együttható a különböző rugók esetében különböző. Például, ha egy rúgót 50 N erővel 1 m-re lehet kihúzni, akkor $k = 50$.

Mekkora erővel lehet egy ilyen rugót $l = 2$ m-re kihúzni?

Osszuk fel azt a távolságot, amire kihúzzuk a rugót, a $[0; l]$ intervallumot, az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ pontokkal n egyenlő részre (80. ábra). Legyen $l = x_n$ és Δx minden szakasz hossza. Ahhoz, hogy a rugót $[0; x_1]$ távolságra húzzuk ki, azaz ahhoz, hogy a 0 pont az x_1 pontba kerüljön, $f(x_1)$ erőt kell kifejteni. Ebben az esetben $\Delta x \cdot f(x_1)$ az elvégzett munka. Ahhoz, hogy a rugót $[x_1; x_2]$ távolságra húzzuk ki, $f(x_2)$ erőt kell kifejteni, és akkor az elvégzett munka $\Delta x \cdot f(x_2)$, és így tovább. Tehát ahhoz, hogy ezt a rugót $[0; l]$ távolságra húzzuk ki, megközelítőleg az alábbi integrálösszeg értékével egyenlő munkát kell elvégezni:

$$A_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n).$$



80. ábra

Az A_n kifejezés értéke n növelésével (és ezzel együtt a Δx csökkentésével) egyre jobban közelít, egyre kevesebbel tér el a keresett munka pontos A értékétől, vagyis ha $n \to \infty$, akkor $A_n \to A$. Tehát

$$A = \int_0^l f(x)dx = \int_0^l kxdx = \frac{1}{2}kl^2.$$

Ha $k = 50$ és $l = 2$ m, akkor $A = 100$ J.

3. *Az integrál gazdasági alkalmazása.* Egy vállalkozás teljesítménye adott idő alatt az $y = f(x)$ függvény szerint változik. Határozzuk meg a $[0; T]$ időintervallum alatt előállított U termékmennyiséget!

Abban az esetben, ha a termelékenység nem változik (azaz, ha az $f(x)$ függvény állandó), akkor az előállított ΔU termék mennyiségét a $[t; t + \Delta t]$ idő alatt a $\Delta U = f(t)\Delta t$ képlettel lehet meghatározni. Általános esetben igaz a $\Delta U \approx f(t)\Delta t$ közelítő képlet, ahol $t \in [t; t + \Delta t]$, a képlet annál pontosabb, minél kisebb Δt értéke.

Osszuk fel a $[0; T]$ szakaszt a $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ pontokkal n egyenlő részre. A $\Delta t = [t_{k-1}; t_k]$ idő alatt legyártott termékmennyiség $\Delta U_k \approx f(t_k)\ \Delta t$, ahol $t_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tehát

$$U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Ha $\Delta t \to 0$, akkor az alkalmazott közelítő értékek egyre pontosabbak, vagyis

$$U = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Ha $f(t)$ a t időpontbeli termelékenység, akkor a $[0; T]$ időintervallum alatt előállított U termékmennyiséget az alábbi képlettel lehet meghatározni:

$$U = \int_0^T f(t)dt.$$

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Az integrál mely alkalmazásait ismered?
2. Hogyan lehet integrállal meghatározni a forgástest térfogatát?
3. Mekkora munkát kell kifejteni ahhoz, hogy egy rugót $l = 1$ m-re húzzunk ki?
4. Mi az integrál gazdasági alkalmazása?

Közös munka

1. Egy brigád termelékenységét a műszak alatt az $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$ képlettel lehet meghatározni, ahol

t az idő órában mérve. Határozzuk meg az 5 óra alatt előállított termékmennyiséget!

● **Megoldás.** Az előállított termék mennyisége a termelékenység primitív függvénye. Ezért

$$U = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (-2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1)dt =$$

$$= \left(-\frac{2{,}53t^3}{3} + \frac{24{,}75t^2}{2} + 111{,}1t \right)\Bigg|_0^5 = -\frac{2{,}53 \cdot 125}{3} + \frac{24{,}75 \cdot 25}{2} +$$

$$+ 111{,}1 \cdot 5 = -\frac{316{,}25}{3} + \frac{618{,}75}{2} + 555{,}5 \approx 759 \text{ (db)}.$$

2. Egy anyagi pont $v = 10t$ m/s sebességgel egyenes vonalúan mozog; az első 4 másodperc alatt 80 métert tett meg. Határozd meg az anyagi pont mozgástörvényét!

● **Megoldás.** A keresett mozgástörvény olyan $s = s(t)$ függvény, melyre $s'(t) = 10t$. Ebben az esetben $s(t)$ a $v = 10t$ függvény primitív függvénye. Az ilyen függvények primitív függvényének általános alakja $s(t) = 5t^2 + C$. Mivel az első 4 másodperc alatt 80 métert tett meg a pont, ezért $80 = 5 \cdot 16 + C$, innen $C = 0$.

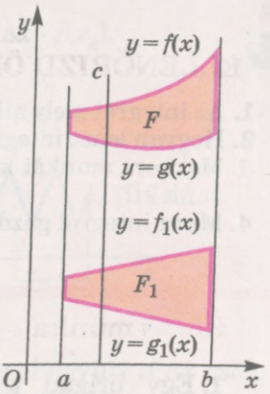
Felelet: a keresett mozgástörvény $s(t) = 5t^2$, ahol t az idő másodpercben, $s(t)$ a megtett út méterben mérve.

3. Bizonyítsd be a Cavalieri-elvet! Azaz igazold, hogyha két alakzatot el lehet úgy helyezni a síkon, hogy egy adott egyenessel párhuzamos összes szelő a két alakzatot páronként azonos hosszúságú szakaszokban metszi, akkor a két alakzat területe egyenlő!

● **Megoldás.** Legyen F az $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ és $y = g(x)$ görbékkel határolt síkidom, F_1 az $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ és $y = g_1(x)$ görbékkel határolt síkidom (81. ábra). Ha az y tengellyel párhuzamos szelő az F és F_1 síkidomot azonos hosszúságú szakaszokban metszi, akkor $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$, bármely $x \in [a; b]$ értékre. Ekkor

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx,$$

vagyis az F és F_1 síkidom területe egyenlő.



81. ábra



BONAVENTURA CAVALIERI

(1598–1647)

Olasz matematikus, a Bolognai Egyetem tanára, a *Mértan* című mű szerzője, melyben kidolgozta az oszthatatlanok módszerét. Olyan feladatokat oldott meg, melyeket most már az $\int_a^b x^n dx$ integrál segítségével oldanak meg, ha $n < 10$ természetes szám. További munkái *Száz különböző feladat…, Sík- és gömbi, lineáris és logaritmusos trigonometria.*

A

Határozd meg a megadott görbékkel határolt síkrész x tengely körüli forgatásával keletkezett test térfogatát (**541–543.**)!

541. $y = 2x + 1, x = 1, x = 4, y = 0.$

542. $y = x^2, x = 1, y = 0.$

543. $y = -x^2 + 2x, y = 0.$

544. Határozd meg annak a testnek a térfogatát, mely az $x^2 + y^2 = 16$ körvonal I. koordinátanegyedhez tartozó íve, az $x = 1$, $x = 3$ és $y = 0$ egyenesek által határolt síkrész x tengely körüli forgatásával keletkezett!

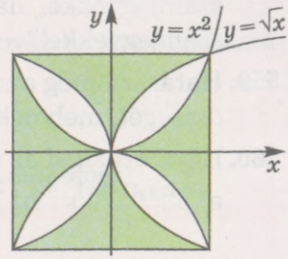
Egy test $v(t)$ sebességgel mozog. Határozd meg a test által a t_1 és t_2 időpont (másodpercben mérve) között megtett utat (méterben mérve) (**545–547.**)!

545. $v(t) = 3t + 2t^2, t_1 = 0, t_2 = 6.$

546. $v(t) = 10t, t_1 = 0, t_2 = 4.$

547. $v(t) = 3t^2 - 2t + 3, t_1 = 0, t_2 = 2.$

548. Egy munkás termelékenységét a $z(t) = -0{,}00645t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (pénzegység/óra) képlet írja le, ahol t a munka megkezdése óta eltelt idő órában mérve, $0 \leqslant t \leqslant 8$. Határozd meg a munkás által egy nap alatt előállított termékek pénzben kifejezett értékét!



82. ábra

549. Határozd meg a 82. ábrán befestett síkrész területét!

B

Határozd meg a megadott görbékkel határolt síkrész x tengely körüli forgatásával keletkezett test térfogatát (**550., 551.**)!

550. $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0.$

551. $y^2 - 4x = 0, x - 2 = 0, x - 4 = 0, y = 0.$

552. Mennyi munkával lehet 5 cm-re kihúzni egy rugót, ha 1 N erővel 1 cm-re lehet kihúzni azt?

553. Egy rugót 9,8 N erővel lehet 1 cm-nyivel összenyomni. Mennyi munkával lehet ezt a rugót 4 cm-nyivel összenyomni?

554. A Forma-1 autóverseny futamaira a kocsik jobb karbantartása végett a szakemberek meghatározták az ideális sebességváltozást az egyenesekben: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Mekkora utat tesz meg ebben az esetben egy pilóta az indulás utáni 2. és 7. másodperc között?

555. Mekkora utat tesz meg a $v(t) = 18t - 6t^2$ sebességgel haladó test az indulásától a megállás pillanatáig?

556. Egy test $v(t)$ sebességének változását a t idő függvényében a $v = 20 - 3t$ (m/s) függvény írja le. Mekkora utat tesz meg a test a 4. másodpercben?

557. Egy huzalban az áramerősség az $I(t) = 4 + 2t$ törvény szerint változik az idő függvényében. Mennyi elektromos töltés halad át a huzal keresztmetszetén a 2. és a 6. másodperc között?

Ismétlő feladatok

558. Hány különböző háromjegyű számot lehet felírni a 0; 1; 2 számjegyekkel, ha a számjegyek nem ismétlődnek? És az 1; 2; 3 számjegyekkel?

559. Határozd meg annak a végtelenül fogyó mértani sorozatnak az összegét, melynek első tagja 4,5, hányadosa pedig 0,75!

560. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

a) $3^{\log_3(1-2x)}$; b) $7^{\log_7(y+1)}$; c) $9^{\log_3 x}$; d) $7^{2\log_7(y-1)}$!

4. számú önálló munka

1. változat

1. Határozd meg az alábbi függvények primitív függvényeinek általános alakját:
a) $f(x) = x^4 - 3x$; b) $f(x) = \cos x$!

2. Határozd meg az $f(x) = 3x^2 - 2$ függvény azon primitív függvényét, melyre illeszkedik a (0; 2) pont!

3. Ábrázold az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja alatti síkrészt a [0; 2] intervallumon, és számítsd ki a területét!

4. Határozd meg az $\int_1^2 3x^3 dx$ integrál értékét!

2. változat

1. Határozd meg az alábbi függvények primitív függvényeinek általános alakját:
a) $f(x) = x^5 + 2x$; b) $f(x) = \sin x$!

2. Határozd meg az $f(x) = 2x + 3$ függvény azon primitív függvényét, melyre illeszkedik a (0; 1) pont!

3. Ábrázold az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja alatti síkrészt a [0; 3] intervallumon, és számítsd ki a területét!

4. Határozd meg az $\int_0^3 4x^2 dx$ integrál értékét!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Add meg a primitív függvény definícióját! Hozz fel példákat!
2. Mi az integrálás?
3. Fogalmazd meg az: a) egytagú kifejezés primitív függvényéről; b) összegfüggvény primitív függvényéről szóló tételt!
4. Hogyan kell meghatározni egy függvény primitív függvényének általános alakját?
5. Mit értünk a függvény grafikonja alatti síkrészen? Hogyan nevezzük ezt az alakzatot más néven?
6. Hogyan kell a függvény grafikonja alatti síkrész területét meghatározni az $[a; b]$ intervallumon?
7. Mi a függvény integrálja?
8. Hogyan jelöljük az integrált?
9. Írd le a Newton–Leibniz-képletet!
10. Mit tartanak a XVII. század legnagyobb felfedezésének?

Matematikatörténeti adalékok

Az integrál fogalmának bevezetését nagyon sok matematikus áldozatos munkája előzte meg. Már Arkhimédész, a Kr. e. III. században kidolgozott olyan eljárásokat a területszámításra és térfogatszámításra, melyek sokban hasonlítanak az integrálszámításra.

Olyan feladatokat oldott meg, melyeket most is integrálással számolunk ki:

$$\int_0^a x\,dx,\ \int_0^a x^2\,dx,\ \int_0^a (x^2+bx)\,dx,\ \int_0^a \sin\varphi\,d\varphi.$$

Hasonló eljárásokat alkalmazott Kepler (1571–1630) is. A forgástestre úgy tekintett, mint végtelen sok elhanyagolhatóan keskeny körlap egyesítésére, és így határozta meg 92 test térfogatát.

Még messzebb ment el Bonaventura Cavalieri. Minden alakzatot oszthatatlan részek összességének tekintett (a síkidomok szakaszokból állnak, a testek síkidomokból), és megfogalmazta elveit (lásd a 3. feladatot a 124. oldalon). A korábbihoz hasonló állítás igaz a testekre is. Cavalieri ezeket az állításokat evidenciaként kezelte, és bizonyítás nélkül elfogadta őket mint alapelvet, princípiumot (*principium* latin szó, jelentése: eredet, alap, ugyanaz, mint az axióma). A mai matematika módszereivel ezek az elvek bizonyítható tételek.

Még Newton és Leibniz előtt sok matematikus foglalkozott általánosan differenciál- és integrálszámítással, csak a két fogalmat egymástól függetlenül, elkülönítve vizsgálták. Ezért azokra a feladatokra, melyeket most a Newton–Leibniz-képlettel egy sorban is meg tudunk oldani, bonyolult mesterséges módszerekkel keresték a választ, és volt olyan feladat is, amit meg sem tudtak oldani. Newton és Leibniz érdeme abban rejlik, hogy kapcsolatot teremtettek a differenciál- és integrálszámítás között, megalkották az egyik legfontosabb tudományt: a *matematikai analízist*. Az ő felfedezésük tette lehetővé, hogy nagyon sok gyakorlati feladat megoldása egyszerűbbé váljon, és megalapoztak további felfedezéseket is. A szakemberek a matematikai analízist tartják a XVII. sz. egyik legnagyobb felfedezésének.



MIHAJLO VASZILJOVICS OSZTROHRADSZKIJ

(1801–1862)

Világhírű ukrán–orosz matematikus, a Szentpétervári, Turáni, Amerikai és Francia Tudományos Akadémia tagja. A Poltavai kormányzóság Pasena falujában született. A matematikai analízis, matematikai fizika, elméleti mechanika, algebra, valószínűségszámítás problémáival foglalkozott. Tarasz Sevcsenko barátja volt.

Osztrohradszkij 1820-ban végezte el az egyetemet Harkivban. *T. F. Oszipovszkij*nak, a haladó tudósnak, az egyetem rektorának volt a tanítványa. Tanulmányait Párizsban folytatta (1822–1828), és már komoly tudományos hírnévnek örvendő tudósként tért vissza hazájába. Szentpéterváron telepedett le, ahol előbb (1828-ban) adjunktussá, majd (1830-ban) akadémikussá választották. Ezenkívül a technikai és katonai felsőfokú tanintézetek egész sorában tartott előadásokat.

Tudományos érdeklődése olyan irányba terelődött, amely a párizsi matematikusok számára aktuális problémákkal állt szoros kapcsolatban. Ez abban is kifejezésre jutott, hogy dolgozatainak többségét francia nyelven írta meg és publikálta.

Csakúgy, mint kortársai (*Fourier, Laplace, Cauchy, Poisson* stb.) – az alkalmazásokkal kapcsolatos problémák megoldására összpontosította erőfeszítéseit. Dolgozatainak többsége mechanikai, illetve matematikai–fizikai kérdésekkel és a matematikai analízis ezekkel kapcsolatos feladataival foglalkozott. Ezenkívül jelentős munkásságot fejtett ki az algebra, a számelmélet és a valószínűség-számítás terén is.

Osztrohradszkij tudományos tevékenységében központi helyet foglalnak el matematikai–fizikai tárgyú dolgozatai. 1826-ban írta meg első dolgozatát, amely 1832-ben jelent meg. Ebben azzal a feladattal foglalkozik. hogy milyen a henger alakú medencében levő folyadék felszínén a hullámok eloszlása. Valamivel később (1829-ben) megoldotta ugyanezt a feladatot olyan medencére is, amelynek az alapja körszektor.

Osztrohradszkij Szentpétervárra visszatérve, közzétette *Megjegyzés a tömegvonzás elméletében föllépő integrálról* című dolgozatát, amelyben eredeti levezetését adta a Poisson-egyenletnek. Erre vonatkozó eredményét már 1826-ban elérte és közölte is *Cauchy*-val. Ezután néhány értekezésében a hő matematikai elméletével foglalkozott. Továbbfejlesztette *Fourier* módszerét az általános alakú szilárd testekre, és ugyancsak elsőként adott szigorú megoldást a folyadékban történő hőeloszlás feladatára. A hőelméletre vonatkozó (1828-ból származó és 1831-ben publikált) megjegyzése tartalmazza *Fourier* módszerének általánosítását.

K. A. Ribnyikov nyomán

Nézzük, mit írtak a matematikai analízis felfedezéséről különböző korok különböző meggyőződésű és nemzetiségű személyei.

„Az összes elméleti felfedezés közül vitathatatlanul az emberiség egyik legnagyobb vívmánya a XVII. században felfedezett végtelenül kicsiny mennyiségekkel végzett számolás" (Friedrich Engels).

„A végtelenül kicsiny mennyiségek analízisét az emberiség legnagyobb kulturális vívmányaival kell együtt említeni" (Alekszandr Hincsin).

Az ukrán és orosz matematikusok közül Mihajlo Vasziljovics Osztrohradszkij és Viktor Jakovics Bunyakovszkij (1804–1889) tett a legtöbbet a matematikai analízis fejlődéséért. Mindketten Ukrajna területén születtek, Párizsban tanultak, Szentpéterváron dolgoztak és a XIX. századi Oroszország legnagyobb matematikusai voltak. A racionális törtfüggvények integrálásával kapcsolatban Osztrohradszkij új módszert talált a polinomok többszörös gyökeinek leválasztására, a világ összes matematikusa számára ismert Osztrohradszkij-tételt és az Osztrohradszkij-képletet.

Bunyakovszkij volt az, aki elsőként bebizonyította az alábbi egyenlőtlenséget

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)dx.$$

A mai matematika *Bunyakovszkij-egyenlőtlenség* néven tartja ezt számon.

A XX. században az analízis területén eredményesen munkálkodott Szerhij Natanovics Bernstejn (1880–1963) és Mihajlo Pilipovics Kravcsuk (1892–1942) ukrán matematikus.

A 3. fejezet összefoglalása

Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény *primitív függvénye* az I intervallumon, ha az intervallum bármely x értékére teljesül az $F'(x) = f(x)$ egyenlőség.

Például az x^2 függvény a $2x$ függvény primitív függvénye, mivel $(x^2)' = 2x$.

Az $f(x)$ függvény bármely primitív függvénye $F(x) + C$ alakú, ahol $F(x)$ az egyik primitív függvénye, C tetszőleges szám.

Azt a műveletet, amikor meghatározzuk a függvény primitív függvényét, *integrálásnak* nevezzük. Az integrálás és a differenciálás egymás fordított műveletei.

Az $f(x)$ függvény primitív függvényét az alábbi táblázatban feltüntetett képletekkel lehet meghatározni.

Adott függvény	k (állandó)	x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	a^x
Primitívje	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
Adott függvény	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Primitívje	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Ha az $F(x)$ és $G(x)$ függvény rendre az $f(x)$ és $g(x)$ függvény primitív függvénye, akkor az $F(x) + G(x)$ függvény az $f(x) + g(x)$ függvény primitív függvénye.

Ha az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye, $k \neq 0$ és b állandó, akkor:

$kF(x)$ a $kf(x)$ függvény primitív függvénye;

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ az $f(kx + b)$ függvény primitív függvénye.

Az $f(x)$ függvény grafikonja alatti síkrész területe (a görbe vonalú trapéz területe) az $[a; b]$ intervallumon az $F(b) - F(a)$ kifejezés értékével egyenlő, ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye.

A $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$ összeget integrálösszegnek nevezzük.

Az $f(x)$ függvény $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$ integrálösszegének határértékét az $[a; b]$ intervallumon, ha $n \to \infty$, az $f(x)$ függvény a-tól b-ig vett *határozott integráljának* nevezzük. Jelölése: $\int_a^b f(x)dx$.

A Newton–Leibniz-képlet, az $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ képlet a *matematikai analízis alapképlete*.

Határozott integrállal oldható meg sok olyan fontos feladat, amely az integrálösszeg határértékére vezetődik vissza.

Ismert tény, hogy az a tudomány (a valószínűség-számítás), ami a szerencsejátékok tanulmányozásával kezdődött, az emberi megismerés egyik legfontosabb tárgyává vált.

Pierre-Simon Laplace

4 A valószínűség-számítás és a matematikai statisztika alapjai

A FEJEZET TÉMAKÖREI

- A kombinatorika elemei.
- Az összeg és a szorzat kombinatorikus szabályai.
- Permutáció, variáció, kombináció.
- A minta jellemzői: a minta nagysága, mediánja, módusza, átlaga.
- A minta grafikus ábrázolása.
- Véletlenszerű esemény.
- Az esemény bekövetkezésének valószínűsége.
- Az esemény feltételes gyakorisága, véletlen mennyiségek

17. §. Halmaz, részhalmaz

Tudjátok-e, hogy mi a brigád, ménes, csorda, raj, készlet stb.? A matematikában minden ilyen csoportot egy szóval illetnek: *halmaz*. Beszélhetünk például a bolygók, az államok, a dalok, a pártok, az egyenletek, a függvények, a pontok, a számok, az alakzatok stb. halmazáról. A halmazhoz tartozó objektumokat a halmaz *elemeinek* nevezzük. Azt, hogy a eleme az M halmaznak, így jelöljük: $a \in M$. A $b \notin M$ jelölés azt jelenti, hogy b nem eleme az M halmaznak. A halmaz elemeit kapcsos zárójelbe tesszük. Például:

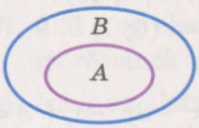
$\{\Delta, \square, \bigcirc\}$ – a Δ, $\square$, $\bigcirc$ alakzatok halmaza;

$\{0, 1, 2, 3\}$ – a 0, 1, 2, 3 számjegyek halmaza.

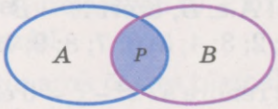
Ezek a halmazok példák *véges* halmazokra. Ha egy halmaznak végtelen sok eleme van, akkor a halmazt *végtelennek* nevezzük. Végtelen halmaz például a természetes számok halmaza, az egész számok, a racionális és a valós számok halmaza is. Ezeket a halmazokat rendre az ***N, Z, Q, R*** betűkkel jelöljük. Végtelen halmazt alkotnak továbbá az egyenes vagy egy szakasz pontjai, a $[2; 3]$ és $(-6; \infty)$ intervallum stb.

Úgy tekintjük, hogy egy halmaz elemei különbözők. Két halmaz *egyenlő*, ha elemeik megegyeznek. Az $\{1, 3, 5\}$ és $\{3, 1, 5\}$ halmazok ugyanannak a halmaznak különböző leírásai.

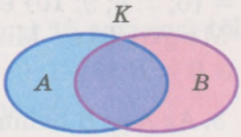
A matematikában gyakran vizsgálnak olyan halmazokat, melyeknek csak egy elemük van, vagy nincs is elemük. Például beszélhetünk a $3x + 5 = 17$ egyenlet megoldásainak halmazáról, vagy az $x^2 + 3 < 0$ egyenlőtlenség megoldásainak halmazáról. Ha egy halmaznak nincs egyetlen eleme sem, akkor az ilyen halmazt *üres halmaznak* nevezzük és a $\varnothing$ szimbólummal jelöljük.



83. ábra



a)



b)

84. ábra

Ha A halmaz a B halmaz része, akkor A a B halmaz *részhalmaza*: $A \subset B$. Ezt Euler diagrammal (Venn diagrammal) lehet szemléltetni (83. ábra). Helytállóak az alábbi összefüggések:

$$N \subset Z, N \subset Q, N \subset R, Z \subset Q, Z \subset R, Q \subset R.$$

Előfordulhat, hogy az A és a B halmaznak van közös eleme. Ha a P halmaz minden eleme az A és B halmaz közös elemei és csak azok, akkor a P halmazt az *A és B halmaz metszetének* nevezzük: $A \cap B = P$; ezt az Euler diagramon úgy ábrázoljuk, ahogy azt a 84. *a* ábra szemlélteti. Azt a halmazt, ami tartalmazza az A és a B halmaz összes elemét és csak azokat, *az A és B halmaz egyesítésének, uniójának* nevezzük. Ha a K halmaz az A és B halmaz egyesítése, akkor így írjuk: $A \cup B = K$ (84. *b* ábra).

Az *A és B halmaz különbségének* azt a halmazt nevezzük, melynek minden eleme eleme az A halmaznak, de nem eleme a B halmaznak. Jelölése: $A \setminus B$. Például, ha $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 4; 5; 7; 8\}$, akkor $A \cap B = \{1; 4\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$, $A \setminus B = \{2; 3\}$.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Hozz fel példát halmazra!
2. Hogyan jelöljük a halmazt és elemét?
3. Milyen lehet egy halmaz?
4. Mely halmazok egyenlők?
5. Mi a részhalmaz?
6. Mi két halmaz uniója?
7. Mi két halmaz metszete?

Közös munka

1. Írjuk le az $M = \{c; d; k\}$ halmaz összes részhalmazát!

● Megoldás. Ennek a halmaznak a részhalmazai:

$$\{c\}, \{d\}, \{k\}, \{c, d\}, \{c, k\}, \{d, k\}, \{c, d, k\}, \varnothing.$$

2. Határozzuk meg az A és B halmaz metszetét és egyesítését, ha $A = \{6; 7; 8; 9; 10\}$ és $B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$!

● Megoldás. Mivel $A \subset B$, ezért $A \cap B = A = \{6; 7; 8; 9; 10\}$. $A \cup B = B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

3. Az A és B halmaz rendre az $x^3 - x = 0$ és az $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ egyenletek megoldáshalmazai. Határozzuk meg: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$!

● Megoldás. Oldjuk meg az egyenleteket:

$x^3 - x = 0$, $x(x - 1)(x + 1) = 0$, innét $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$;

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, $x^2(x - 3) - (x - 3) = 0$, $(x^2 - 1)(x - 3) = 0$, innét $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Tehát, $A = \{0, -1, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$.

Ezért: a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 3\}$; b) $A \cap B = \{-1, 1\}$.

Szóbeli feladatok

561. Hány eleműek az alábbi halmazok:
a) $\{7, 8, 9\}$; b) $\{a, b, c, d\}$?

562. Hány elemű 10 kétjegyű többszöröseinek halmaza? Adjátok meg ezt a halmazt elemei felsorolásával!

563. Hány elemű a négyzetek halmaza? És azon rombuszok halmaza, melyek hegyesszöge 60°?

564. Hány elemű az alábbi egyenletek megoldáshalmazai:
a) $x^2 = 2$; b) $x^2 + 27 = 8$; c) $|x| = 0$?

565. Mi a metszete és az egyesítése: a) a természetes és az egész számok halmazának; b) a racionális és az irracionális számok halmazának?

566. Hogyan hívjuk: a) a gyökök halmazát; b) a bank által kiszolgált emberek halmazát; c) a vázában lévő virágok halmazát; d) az egyszerre fellépő zenészek halmazát?

A

567. Sorold fel az alábbi halmazok elemeit:
A – a hét napjainak halmaza; B – a közlekedési lámpa színeinek halmaza; C – a földrészek halmaza; D – a számjegyek halmaza; E – a szivárvány színeinek halmaza!

568. Hozz fel példát: a) kételemű; b) ötelemű; c) egyelemű halmazra!

569. Írd le vezeték- és keresztneved betűinek halmazát!

570. Sorold fel azon számjegyek halmazát, mellyel fel lehet írni a születési dátumodat!

571. Add meg elemei felsorolásával: a) 3; b) 5; c) 15 egyjegyű többszöröseinek halmazát!

572. Írd le az alábbi halmazok összes részhalmazát:
a) $\{\bullet, \blacksquare\}$; b) $\{*, \Delta, \#\}$!

573. Írd le a magyar ábécé magánhangzóinak halmazát!

574. Írd le azon egész számok halmazát, melyek:
a) 3-tól nagyobbak és 13-tól kisebbek;
b) nem nagyobb mint 12 és nem kisebb mint –2!

575. Jelöld számegyenesen a –3; –1; 2; 3; 4; 5 számokat jelölő pontok halmazát!

576. Sorold fel az alábbi halmazok elemeit: a) 60; b) 73 számok természetes osztói!

577. Írd le 120 és 150 közös osztóinak halmazát!

578. Írd le az alábbi egyenletek megoldáshalmazát:

a) $x(x^2 - 4) = 0$; b) $x^2 + 6 = 0$; c) $x^2 = \sqrt{x}$!

579. Írd le az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:

a) $2x - 1 < 7$; b) $x^2 - 2x \leqslant 0$; c) $|x - 3| < 2$!

580. Melyik állítás igaz:

a) $7 \in Q$; b) $-5 \in R$; c) $\sqrt{3} \in Q$; d) $2\frac{1}{3} \in Z$?

581. Részhalmaza-e a galambok halmaza a madarak halmazának? Ábrázold Euler diagramon!

B

582. Határozd meg az adott intervallumon értelmezett alábbi függvény értékeinek halmazát:

a) $y = x^2$, $[-2; 7]$;

b) $y = 1^x$, ha $x \in [1; 8]$.

583. Adott a $K = \{a, b, c, 2\}$ és a $P = \{1, 2, a, c, x\}$ halmaz. Határozd meg a metszetüket, egyesítésüket és különbségüket

Határozd meg $A \cap B$ *és* $A \cup B$ (**584., 585.**)!

584. a) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$;

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$;

c) $A = \{\blacklozenge, \blacktriangle, \bullet\}$, $B = \{\blacktriangle, \circ, \blacksquare\}$;

d) $A = \{\square, \sun, \blacktriangle\}$, $B = \{\sun, \Delta, \square\}$.

585. a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$;

b) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{б, в, \beta, \gamma, г\}$;

c) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$;

d) $A = \{2, 3\}$, $B = \{22, 33\}$.

586. Az alábbi halmazok közül melyik véges és melyik végtelen:

a) a negatív számok halmaza;

b) a π szám számjegyeinek halmaza;

c) a $[0; 1]$ intervallum számai;

d) a $2x + 3y = 5$ egyenlet megoldásai;

e) az $x^2 - 2y + 1 \leqslant 0$ egyenlőtlenség megoldásai?

587. Add meg elemei felsorolásával az alábbi halmazokat: a) 60 és 126 közös osztói; b) az első száz természetes szám prímszámai; c) az $x^2 + y^2 = 0$ egyenlet megoldásai!

Határozd meg a számintervallumok egyesítését és metszeteit (**588., 589.**)!

588. a) $(-\infty; 5)$ és $(1; \infty)$; b) $(1; 3)$ és $[1; \infty)$; c) $[0; 2]$ és $(-\infty; 0)$.

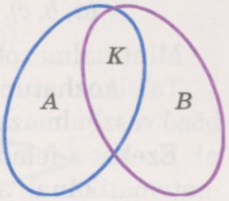
589. a) $(-7; 7)$ és $(-\infty; -1)$; b) $[0; 3)$ és $[-3; 0]$; c) $[4; \infty)$ és $[1; 2)$.

590. Az A és a B halmaz rendre a $2x + 3y = 5$ és az $x - 5y = 9$ egyenletek megoldáshalmazai. Add meg az $A \cap B$ halmazt! Mi ennek a halmaznak az eleme?

591. Az A halmaz kettő többszöröseinek a halmaza, a B halmaz 3 többszöröseinek halmaza. Mi az $A \cap B$ halmaz? Hány elemű ez a halmaz?

592. Az A halmaz a páros természetes számok halmaza, a B halmaz a páratlan természetes számok halmaza. Határozd meg az $A \cap B$, az $A \cup B$ és az $A \setminus B$ halmazt!

593. 85. ábrán az A halmaz a téglalapok halmaza, B a rombuszok halmaza, $K = A \cap B$. Jellemezd a K halmazt! Igaz-e, hogy $K \cap A = K$, $K \cup A = A$? Jellemezd az $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!



85. ábra

594. a) Legyen az A halmaz a másodfokú egyenletek halmaza, a B halmaz azon egyenletek halmaza, melyeknek két megoldásuk van. Egyenlő-e ez a két halmaz? Ábrázold a halmazokat Euler diagramon!

b) Adott a $\{\Delta, \square, \bigcirc\}$ halmaz. Írd le az összes kételemű részhalmazát! Hány részhalmaza van?

595. Adott az $A = \{a; b; c; d\}$ halmaz. Sorold fel a halmaz összes háromelemű részhalmazát! Hány részhalmaza van?

596. Hány részhalmaza van annak a halmaznak, amely: a) egyelemű; b) kételemű; c) háromelemű; d) négyelemű? Ellenőrizd az állítást: „Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van”, ha $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$!

597*. Igazold, hogy bármely ötelemű halmaznak ugyanannyi kételemű, mint háromelemű részhalmaza van!

Ismétlő feladatok

598. Hasonlítsd össze az alábbi számokat:

a) $\frac{4}{9}$ és $\frac{5}{11}$; b) $\frac{5}{22}$ és $0{,}2(27)$!

599. Ábrázold a következő függvények grafikonját:

a) $y = (x + 1)^2$; b) $y = x^2 + 1$!

600. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{(x-3)(x+5)}{(x-1)} \geqslant 0$; b) $\frac{x(x^2-2x+1)}{(4x+4)} < 0$!

18. §. Kombinatorika és a szorzásszabály

A *halmaz*, *részhalmaz* fogalmakat tárgyalva nem kell odafigyelni az elemek sorrendjére. Azt mondjuk, hogy nem rendezett. Rajtuk kívül gyakran *rendezett halmazokkal* is találkozhatunk. Így hívják azokat a halmazokat ahol az elemek sorrendje kötött. Az ilyen halmazokat nem kapcsos, hanem gömbölyű zárójellel jelöljük. Például az $\{a; b; c\}$ halmazból hat rendezett háromelemű halmazt lehet alkotni:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Mint halmazok egyenlők, mint rendezett halmazok különbözők.

Találkozhatunk olyan feladatokkal, amikor egy halmaz különböző részhalmazait vagy rendezett részhalmazait kell meghatározni. Ezeket a feladatokat *kombinatorikus feladatoknak* nevezzük. A matematikának azt a részét, ami kombinatorikus feladatokkal foglalkozik, *kombinatorikának* nevezzük.

Tekintsük át azt a két fő szabályt, mellyel több kombinatorikus feladat megoldható.

1. feladat. N városban két egyetem van, az egyik műszaki, a másik közgazdasági. Az egyik felvételiző diáknak a műszaki egyetem három szakja és a közgazdasági egyetem 2 szakja tetszik. Hány lehetősége van ennek a felvételizőnek, hogy egyetemista legyen?

● Megoldás. Jelöljük A-val a felvételiző diák által a műszaki egyetem kiválasztott szakjainak halmazát, B-vel a közgazdasági egyetem kiválasztott szakjainak halmazát. Így $A = \{m; n; k\}$ és $B = \{p; s\}$. Mivel a két halmaznak nincs közös eleme, így a felvételiző összesen $(3 + 2 = 5)$ öt szak közül választhat. A leírt esetet az alábbi állítás általánosítja, amit *összegszabálynak* nevezünk.

Ha az A halmazból egyik elemét m-féleképpen lehet kiválasztani, a B halmazból pedig n-féleképpen, akkor az A vagy a B halmazból $m + n$-féleképpen lehet kiválasztani egy elemet.

Az összegszabály érvényes kettőnél több halmazra is.

2. feladat. Egy 4 fős család nyári pihenést tervez. A gyerekek 4 várost választottak ki: Odessza, Jevpatória, Jalta, Feodoszia. A szülők ezekben a városokban több üdülőt is választottak. Odesszá-

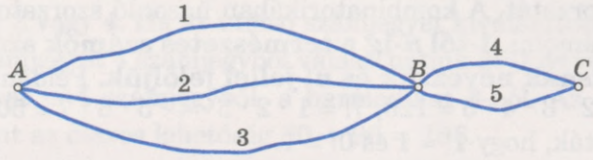
ban 1-et, Jevpatóriában 3-t, Jaltában 2-t, Feodosziában 2-t. Hány különböző lehetőség közül választhat a család?

● **Megoldás.** Mivel mindegyik üdülő különböző, ezért a feladat megoldásához elegendő meghatározni a feladatban szereplő halmazok egyesítésének elemszámát: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Tehát a család 8 lehetőségből választhat.

3. feladat. Az A pontból a B pontba 3 ösvény vezet, a B-ből C-be pedig kettő. Hány útvonalon lehet eljutni az A pontból a C pontba?

● **Megoldás.** Ahhoz, hogy eljussunk az A pontból a B pontba, 3 ösvény közül kell egyet kiválasztani (86. ábra): 1, 2 vagy 3. Ezután a másik két ösvényből kell egyet választani: 4 vagy 5. Összesen az A-ból a C-be 6 útvonal vezet, mivel $3 \cdot 2 = 6$. Az összes lehetséges útvonalat számpárokkal jelölhetjük meg:

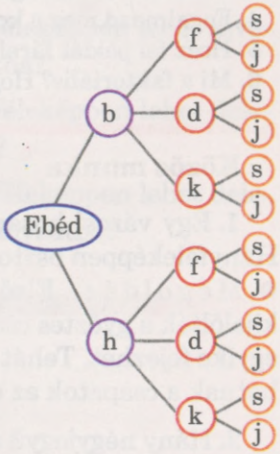
(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).



86. ábra

Általánosítsuk a leírt esetet. **Ha az első elemet *m*-féleképpen lehet kiválasztani, a másodikat pedig *n*-féleképpen, akkor ilyen elempárt *mn*-féleképpen lehet kiválasztani.** Ez a *szorzásszabály*, amit a *kombinatorika* alapszabályának is szoktak nevezni. Jegyezzétek meg: rendezett párokról van szó, melyek elemei különbözők.

A szorzásszabály bővíthető rendezett hármasokra, négyesekre, bármely rendezett véges halmazra. Többek között, **ha a rendezett hármas első elemét *m*-féleképpen, második elemét *n*-féleképpen, harmadik elemét pedig *k*-féleképpen lehet kiválasztani, akkor ilyen elemhármast *mnk*-féleképpen lehet kiválasztani.** Például, ha egy étkezdében 2 levest főztek: borscs (b) és húsleves (h), 3 másodikat: fasírt (f), derelye (d) és töltött káposzta (k) és 2 édességet: sütemény (s) és



87. ábra

jégkrém (*j*), akkor az étkezde 12 különböző háromfogásos ebédet tud ajánlani, mivelhogy $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

A felvázolt esetet szemlélteti a 87. ábrán látható diagram. Az ilyen diagram *fa*.

4. feladat. Hány különböző szerelvényt lehet összeállítani 6 vagonból, ha bármelyik vagon bárhol állhat?

● **Megoldás.** Az első helyre a hat vagon közül még bármelyiket választhatjuk. 6 lehetőségünk van. A második vagont már csak a maradék 5 vagonból lehet kiválasztani. Ezért az első két vagont a szorzás szabálya szerint $6 \cdot 5$-féleképpen lehet kiválasztani. A harmadik vagon a maradék 4 vagon közül az egyik lehet. Ezért az első három vagont $6 \cdot 5 \cdot 4$-féleképpen lehet összekapcsolni. Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk a feleletet: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ különböző szerelvényt lehet összeállítani.

Figyeld meg az utolsó feladat megoldását. Arra a feladatra lehet visszavezetni, hogy ki kell számolni 1-től 6-ig a természetes számok szorzatát. A kombinatorikában hasonló szorzatokat gyakran kell számolni. **1-től *n*-ig a természetes számok szorzatát *n* faktoriálisnak nevezzük és *n*! jellel jelöljük.** Például:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Elfogadták, hogy $1! = 1$ és $0! = 1$.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Milyen feladatokat nevezünk kombinatorikusnak?
2. Mi a kombinatorika?
3. Definiáld az összegszabályt!
4. Fogalmazd meg a kombinatorika fő szabályát!
5. Hozz fel példát fára!
6. Mi a faktoriális? Hogyan jelöljük?

Közös munka

1. Egy városi kosárlabdaversenyen 12 iskola csapata vett részt. Hányféleképpen osztozkodhatnak a csapatok az első két helyen?

● **Megoldás.** Első helyen a 12 csapat egyike végezhet. Miután kijelölték a győztes csapatot, a második helyen a maradék 11 csapat egyike fejezhet. Tehát összesen $12 \cdot 11 = 132$-féleképpen osztozkodhatnak a csapatok az első két helyen.

2. Hány négyjegyű szám írható fel a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel, ha azok nem ismétlődhetnek?

● **Megoldás.** Első helyre 5 számjegyből választhatunk, 1, 2, 3, 4 vagy 5. Ha az első számjegyet kiválasztottuk, akkor a másodikat is 5 számjegyből választhatjuk ki, a harmadikat 4-ből. A szorzás szabályának megfelelően az összes lehetséges eset

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300.$$

3. Hány páros négyjegyű szám írható fel a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel, ha azok nem ismétlődhetnek?

● **Megoldás.** A páros számok utolsó számjegye 0, 2 vagy 4. A négyjegyű páros számok halmazát osszuk két részre: 1) azokra a számokra, melyek utolsó számjegye 0, és 2) azokra melyek utolsó számjegye nem 0.

Az első halmazban $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ szám lesz (a számjegyeket, kivéve az utolsót, 5 számjegyből választhatjuk ki).

A második halmazban $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ szám van. Utolsó számjegye vagy 2 vagy 4. Ha az utolsó számjegyet kiválasztottuk, akkor az első számjegyet 4 számjegyből választhatjuk ki (kivéve a nullát), a másodikat is 4 számjegyből, a harmadikat 3-ból. Az összegszabály szerint az összes lehetőség $60 + 96 = 156$.

Szóbeli feladatok

601. Számítsd ki:
a) 2!; b) 3!; c) 4!; d)5! !

602. Egy osztályba 11 fiú és 10 lány jár. Hányféleképpen lehet kiválasztani egy tanulót a diák önkormányzatba?

603. Egy osztályba 11 fiú és 10 lány jár. Hányféleképpen lehet delegálni két tanulót a diák önkormányzatba?

604. Egy osztályba 12 fiú és 10 lány jár. Hányféleképpen lehet delegálni egy fiút és egy lányt a diák önkormányzatba?

A

605. Számítsd ki:
a) 5!; b) 8!; c) 10!; d) 13! !

606. Egyszerűsíts az alábbi kifejezéseket:
a) $n! \cdot (n + 1)$; b) $n \cdot (n - 1)!$; c) $(n + 1)! : n!$; d) $n! : n$!

607. Egy üzletben háromféle keksz és tízféle cukorka volt árusításban. Szilárd vagy kekszet vagy cukorkát szeretett volna vásárolni a húgának. Hányféleképpen választhatott?

608. Hányféleképpen ültethető le 4 gyerek egy lócára?

609. Egy hegy csúcsára 4 ösvény vezet. Hányféle útvonalon mehetnek a turisták fel és jöhetnek le a csúcsról, ha felfelé és lefelé különböző ösvényeken haladnak?

610. Egy étkezde reggelire három második fogást (A, B, C) és 2 italt (M, K) készített. Hány kétfogásos reggelit lehet kiválasztani az étlapról? Ábrázold fán!

611. Hányféleképpen állhat sorba a pénztár előtt 5 egyén?

612. Hány mondat alkotható a „mi", „szeretünk", „játszani" szavakból? Hány mondat alkotható a „mi", „nagyon", „szeretünk", „játszani" szavakból?

613. Hányféleképpen fűzhető fel 8 különböző gyöngy?

614. Hány háromjegyű szám írható le az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekkel?

B

615. Számítsd ki:
a) $10! : 5!$; b) $13! : 10!$; c) $20! : 25!$; d) $100! : 97!$!

616. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:
a) $n! : (n - 1)$; b) $(n - 1)! : n!$; c) $(n + 1)! : (n - 1)!$!

617. Számítsd ki a $(2n)! : n!$ kifejezés értékét, ha: a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 10$!

618. Határozd meg az n értékét, ha:
a) $n! = (n - 1)! \cdot 8$; b) $(n + 2)! = 132 \cdot n!$!

619. Nyolc barát sakkversenyt szervezett úgy, hogy mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Hány játszma volt?

620. Egy étkezde 3 levest (A, B, C), 3 másodikat (a, b, c) és 3 desszertet (x, p, y) készített. Hány különféle háromfogásos ebéd közül lehet választani? Ábrázold fán!

621. A szállodából a tengerhez 7 út vezet. A turista hányféleképpen mehet le a tengerhez, és jöhet vissza? Vizsgáld külön azokat az eseteket, ha: a) a turista ugyanazon az úton jön vissza, mint

amelyiken lement a tengerhez; b) különböző utakon megy le és jön vissza; c) az előző esetek közül az egyik teljesül!

622. Hány különböző kocsisort állíthat össze egy kisfiú a fehér, sárga, kék és piros játékautóiból?

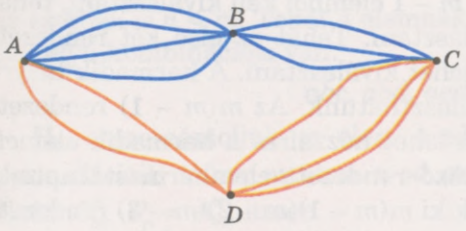
623. Hány páratlan szám írható fel a 0, 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekkel, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?

624. A 11. *A* osztálynak szerdán órarend szerint 6 órája van, köztük algebra és mértan. Hány különböző órarendje lehet ezen a napon ennek az osztálynak, ha az algebra- és mértanóra egymást követi?

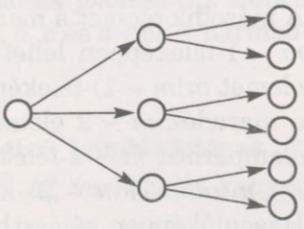
625. A 11. *B* osztálynak kedden órarend szerint 7 órája van, köztük fizika és csillagászat. Hány különböző órarendje lehet ezen a napon ennek az osztálynak, ha a fizika- és csillagászatóra nem egymást követő órák?

626. Hány rendezett elemhármast lehet összeállítani az a, b, c, d betűkből?

627. Alkoss kombinatorikus feladatot a 88. és 89. ábrák alapján, és oldd meg őket!



88. ábra



89. ábra

Ismétlő feladatok

628. Határozd meg az alábbi függvények derivált függvényeit:

a) $y = 2x^3 - 3$; b) $y = 2x(x - 3)$;

c) $y = 2\sin x - 3$; d) $y = 2 - 3e^x$!

629. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{2x - 3} = 5$; b) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$!

630. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

a) $1 - \sin^2 x$; b) $1 + \operatorname{tg}^2 x$; c) $1 + \cos 2x$!

19. §. Variáció, permutáció és kombináció

A valószínűség-számítás nehezebb feladatai megoldásához szükséges megtanulni, hogy hányféleképpen választhatunk ki egy elemet adott halmazból. Legyen adott egy m-elemű halmaz: $a, b, c, \ldots, k$. Ha különböző módon kiválasztunk a halmazból elemeket, részhalmazokat képezünk, akár rendezetteket, akár nem rendezetteket, különböző mintákat hozunk létre. Attól függően, hogy miben különbözik az egyik kiválasztás a másiktól, másképpen nevezzük őket.

Azokat a kiválasztásokat, melyek az elemek sorrendjében vagy az elemeik számában különböznek, *variációnak* nevezzük. Például az a, b és c 3 elemből az alábbi kételemű variációk írhatók fel:

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

Tehát 3 elem másodosztályú variációinak száma 6. A_m^n-nel jelöljük az m elemű halmaz n-ed osztályú variációinak számát. Ezért $A_3^2 = 6$. Az A_m^n kifejezésben minden esetben $n \leqslant m$.

Hogyan határozható meg az A_m^n különböző természetes n-re és m-re? Vegyünk egy m elemű halmazt. Az első elemet m-féleképpen lehet kiválasztani; az m elemek bármelyikét kiválaszthatjuk. A második elemet a maradék $m - 1$ elemből kell kiválasztani, tehát $m - 1$-féleképpen lehet kiválasztani. Tehát az első két rendezett elemet $m(m - 1)$-féleképpen lehet kiválasztani. A harmadik helyre a maradék $m - 2$ elemből választhatunk. Az $m(m - 1)$ rendezett elempárhoz $m - 2$-féleképpen lehet hozzáírni a harmadik elemet, így $m(m - 1)(m - 2)$ különböző rendezett elemhármast kapunk. Hasonlóképpen választhatunk ki $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$ rendezett négyeseket és így tovább. Ezt a gondolatmenetet folytatva, arra a következtetésre jutunk, hogy bármely természetes m-re és n-re $A_m^n = m(m - 1)(m - 2)(m - 3) \ldots \big(m - (n - 1)\big)$.

Az egyenlőség jobb oldalán n szorzótényező van, ezért az eredményt az alábbi szabályban fogalmazhatjuk meg.

m elem n-ed osztályú variációinak száma egyenlő n egymást követő természetes szám szorzatával, melyek közül a legnagyobb m-mel egyenlő. Például $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

1. feladat. Egy 20 tagú csoport hányféleképpen választhat elnököt és titkárt?

● Megoldás. A feladatban egy 20 elemű halmaz rendezett kételemű részhalmazairól van szó. Ezek száma $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

Felelet: 380-féleképpen.

Ha megnézzük azt a kiválasztást, amikor $n = m$, akkor olyan halmazokat kapunk, melyek csak az elemek sorrendjében különböznek.

m elem m-ed osztályú variációját permutációnak nevezzük. n elem összes permutációjának jelölése P_n. Például 3, a, b és c elemnek 6 permutációja van:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Tehát $P_3 = 6$. Általános esetben m elem permutációnak száma egyenlő m elem m-ed osztályú variációinak számával, tehát

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Mindig igaz az alábbi egyenlőség: $P_m = m!$ Például:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

2. feladat. Hányféleképpen lehet 10 névből névsort összeállítani?

● **Megoldás.** $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

Felelet: 3 628 800-féleképpen.

Azok a kiválasztások, melyek egymástól legalább egy elemben különböznek, és nem az elemek sorrendjében, *kombinációnak* nevezzük. m elem n-ed osztályú kombinációjának jelölése C_m^n. Ebben az esetben is $n \leqslant m$. Tehát 4 elemnek, az a, b, c és d-nek 4 harmadosztályú kombinációja van:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Ha összeszámoljuk m elem n-ed osztályú kombinációnak P_n permutációit, akkor m elem n-ed osztályú A_m^n variációját kapjuk. Ezért $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, innen

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Ha megszorozzuk a tört számlálóját és nevezőjét $(m-n)!$, megkapjuk m elem n-ed osztályú kombinációja képletét:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Például $C_6^4 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15.$

Jegyezzétek meg: $C_m^m = 1$, $C_m^1 = m$. Azt is elfogadjuk, hogy $C_m^0 = 1$, bármely $m \in N$ esetén.

3. feladat. Hányféleképpen lehet kiválasztani 25 tanuló közül két küldöttet?

● **Megoldás.** Ebben az esetben $m = 25$, $n = 2$ és nem számít a sorrend. Ezért

$$C_{25}^{2} = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

Felelet: 300-féleképpen.



ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a kombinatorika?
2. Mi a permutáció? Hogyan kell meghatározni P_n értékét?
3. Add meg a faktoriális definícióját!
4. Mi a variáció? Milyen képlettel lehet maghatározni m elem n-ed osztályú variációinak számát?
5. Mi a kombináció? Milyen képlettel lehet maghatározni m elem n-ed osztályú kombinációinak számát?



Közös munka

1. Hányféleképpen lehet összeállítani egy osztály egynapi órarendjét, ha 10 tantárgyat tanulnak és naponta 5 órájuk van?

● **Megoldás.** A feladatban egy 10 elemű halmaz ötelemű rendezett részhalmazainak számáról van szó. Ez a variáció $A_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.

Felelet: 30 240-féleképpen.

2. Hányféleképpen lehet egy polcon elrendezni 5 lemezt?

● **Megoldás.** Ötelemű rendezett halmazok számáról van szó. A keresett szám

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Felelet: 120-féleképpen.

3. Számítsd ki: a) C_7^3; b) C_{20}^{18}.

● **Megoldás.**

a) $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$; b) $C_{20}^{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190$.

4. Egy körvonalon 9 pontot tüntettek fel. Hány szakaszt határoz meg ez a kilenc pont, amennyiben mindegyik pontot mindegyikkel összekötjük?

● **Megoldás.** Ilyen szakasz annyi van, ahányféleképpen kiválaszthatunk 2 pontot a 9 közül, úgyhogy nem számít a sorrend, azaz: $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$.

Szóbeli feladatok

631. Hány lehetséges permutációja van az α, β, γ betűknek?

632. Számítsd ki P_2, P_3, P_4!

633. Számítsd ki C_5^1, C_5^5, C_5^0!

634. Hányféleképpen ülhet le négy tanuló két, kétszemélyes padba?

635. Hányféleképpen lehet kiválasztani három különböző cukorka közül kettőt?

A

636. Sorold fel az x, y, z és t elemek másodosztályú kombinációit!

637. Sorold fel az x, y, z és t elemek másodosztályú variációit!

638. Állítsd össze az A, B és C elemek permutációit!

639. Számítsd ki: a) 5!; b) 6!; c) P_4; d) P_7!

640. Számítsd ki P_n értékét, ha n 6, 7, 8 és 9!

641. Hányféleképpen ülhet le hat tanuló három, kétszemélyes padba?

642. Egy tányéron 7 körte van. Öt gyereknek kell elvenni egy-egy körtét. Hányféleképpen lehetséges ez?

643. Hány különböző háromjegyű szám írható le a 6, 7 és 8-as számjegyekkel, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?

644. Hány különböző négyjegyű szám írható le a 0, 1, 2 és 3-as számjegyekkel, ha a felírt számok számjegyei különbözők?

645. Írd le az A, B, C és D betűk másodosztályú variációit!

646. Hányféleképpen ülhet le 5 tanuló 10 székre?

647. Számítsd ki: a) A_5^3; b) A_8^4; c) A_9^8; d) A_{50}^2!

648. Számítsd ki: a) A_6^3; b) A_{10}^4; c) C_5^3; d) C_{10}^8!

649. Mi több: C_7^4 vagy C_7^3?

650. Számítsd ki: a) C_9^3; b) C_{10}^7; c) $C_{12}^{10} : P_3$; d) $A_{10}^2 - C_{10}^2$!

651. Egy polcon 20 könyv van. Hányféleképpen vehetünk le két könyvet erről a polcról?

652. Egy 32 fős osztályban hányféleképpen lehet kiválasztani két ügyeletest?

653. Hány valódi tört írható fel, ha a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számok közül az egyik a számláló, egy másik a nevező?

654. Hány szakaszt határoz meg n adott pont?

655. Hány átlója van egy tízoldalú; n-oldalú domború sokszögnek?

B

656. Öt számkártyánk van, melyekre az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyeket írtuk. Hány különböző: a) kétjegyű; b) háromjegyű; c) négyjegyű számot lehet kirakni ezekből a számkártyákból?

657. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek minden számjegye különböző? És négyjegyű?

658. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek minden számjegye nem kisebb, mint 5, és a számjegyei nem ismétlődnek?

659. Hány szótárra van szükségünk, hogy öt különböző nyelvről fordíthassunk ezen nyelvek bármelyikére?

660. Hány különböző trikolort (vízszintes, három egyenlő szélességű sávból álló zászlót) varrhatunk 5 különböző színű anyagból?

661. Bizonyítsd be, hogy bármely természetes n-re teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

a) $P_{n+1} = nP_n$; b) $A_m^{m-1} = P_m$; c) $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$!

662. Határozd meg n értékét, ha: a) $P_n = 42 \cdot P_{n-2}$; b) $P_n = 720 \cdot P_{n-3}$!

663. Melyik szám kisebb és hányszor:

a) A_8^5 vagy P_8; b) A_9^8 vagy P_9; c) C_{20}^2 vagy C_{20}^3; d) C_{30}^2 vagy C_{30}^{28}?

664. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $A_x^4 = 56 \cdot A_x^2$; b) $A_x^5 = 72 \cdot A_{x-2}^3$; c) $C_x^2 = 21$; d) $C_x^2 = 20 + x$!

665. Bizonyítsd be, ha m és n természetes szám és $m > n$, akkor:

a) $C_m^n = C_m^{m-n}$; b) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$!

666*. Hányféle leosztás lehet egy dominójátékban, ha 28 dominókő van és mindenki 7 követ kap?

667. Hányféleképpen lehet kitölteni egy lottószelvényt, ha 49 számból 6-ot kell bejelölni?

Ismétlő feladatok

668. Határozd meg az alábbi függvények primitív függvényét:
a) $y = 2x^2 - 5$; b) $y = 2^x$; c) $y = 2\sin x$; d) $y = \cos 3x$!

669. Oldd meg a következő egyenleteket:
a) $5^{2x+3} = 5$; b) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$!

670. Írd le az alábbi kifejezések logaritmusát:
a) $1 + 2\ln x$; b) $3\lg x - \lg 2x$; c) $2 + \log_2 2x$!

20. §. A statisztika alapjai

A *statisztika* különböző tömegjelenségekkel, folyamatokkal, eseményekkel kapcsolatos adatok gyűjtésével, feldolgozásával, tanulmányozásával foglalkozó tudomány. Leggyakrabban a közgazdaságban, politikában és a kísérleti kutatásokban alkalmazzák. A statisztikai adatokat megfigyeléssel, többek között összeírással, lekérdezéssel és nyilvántartásba vett adatokból gyűjtik.

A tömegjelenségek statisztikai kimutatásait az egész sokaság részéből, a *minta* elemzéséből kapják. Például ahhoz, hogy megállapítsuk a leggyakoribb férfi lábméretet, elegendő néhány tíz embert megkérdezni. Tegyük fel, hogy 60 embert kérdeztünk meg. Az eredményt az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

Cipőméret	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Férfiak száma	1	2	3	7	10	9	8	8	6	4	1	1

Ez a *gyakorisági táblázat*, ahol a második sor a *gyakoriság*. Tehát a 32-es méret gyakorisága 6. Ennek a méretnek a relatív gyakorisága: $6 : 60 = 0{,}1 = 10\%$.

Elemezve ezt a mintát, azt az általános következtetést lehet levonni, hogy a férficipők 10%-át 32-es méretben kell legyártani, és kétszer kevesebbre van szükség 26-os méretben. Ezek közelítő arányok, melyek a gyakorlatban elegendők is.

A különböző minták elemzése a *matematikai statisztika* területe. Fő feladata, kidolgozni olyan effektív módszereket, melyekkel tömegjelenségeket lehet tanulmányozni a kiválasztott minta alapján. A minta objektumait *elemeknek* nevezzük. Egy megfigyeléssel kiválasztott minta lehet rendezetlen. Ha rendezzük a mintát, akkor *statisztikai sort* kapunk. A statisztikai sor szélső értékei közötti különbség a *minta terjedelme*. Vegyük az alábbi mintát:

4, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 6, 1, 7, 7, 3, 2, 5.

Rendezzük növekvő sorrendbe az adatokat:

$$1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.$$

Ez egy statisztikai sor. Terjedelme $r = 9 - 1 = 8$.

A *minta módusza* – a leggyakoribb elem. A *minta mediánja* az a szám, amely a statisztikai sort felezi. Az előbb vizsgált minta módusza 7, mediánja 5,5, mivel $\frac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5$.

n szám számtani középarányosa vagy átlaga a számok összegének n-ed része. Ha adott n szám, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor az átlaguk:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

A *minta átlaga* az összes elem számtani közepe. Például az 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8 minta átlaga:

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 6 + 8) = 4.$$

Ha az elemek ismétlődnek, akkor az összeg helyettesíthető szorzattal.

Feladat. Egy brigád 7 tagja havonta fejenként 2300 hrivnyát keres, 8 munkás 2450 hrivnyát, 5-nek a fizetése 2500 hrivnya. Határozd meg a brigád átlagkeresetét!

● **Megoldás.** Összesen 20-an dolgoznak ebben a brigádban: $7 + 8 + 5 = 20$. Ezért a keresett átlagbér:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(2300 \cdot 7 + 2450 \cdot 8 + 2500 \cdot 5) = 2410.$$

Felelet: 2410 hrn.

A statisztika gyakran alkalmazza a *négyzetes átlagot* is. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n szám σ_1 négyzetes átlagát az alábbi képlet adja meg:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

A négyzetes átlaggal a sokaság hibáját becslik vagy az átlagtól való eltérést.

Példa. Egy R sugarú henger alakú alkatrész esztergályozása során a munkás által legyártott henger a gyakorlatban $R + \alpha$ sugarú lesz, ahol α valamely méretbeli eltérés (pozitív vagy negatív). Két esztergályos 6–6 alkatrészt gyártott le az alábbi tizedmilliméterekben megadott hibákkal:

az első: 2, –5; 4; –3; –3; 5;
a második: 3; –1; 4; 1; 1; 2.
Ki végzett minőségi munkát?

Ahhoz, hogy válaszoljunk erre a kérdésre, ki kell számolni a munkások által vétet hibák négyzetes átlagát:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(4+25+16+9+9+25)} \approx 14{,}7;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9+1+16+1+1+4)} \approx 5{,}3.$$

Tehát a második munkás precízebben dolgozott.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a statisztika? Mi a matematikai statisztika?
2. Magyarázd meg, mi a minta! Hozz fel példákat!
3. Mi a minta eleme? Mi a variációs sor, statisztikai sor?
4. Mi a minta terjedelme, módusza, mediánja, számtani közepe?
5. Mit nevezünk a számok számtani közepének, mértani közepének, négyzetes átlagának?

Közös munka

1. Egy utazási iroda heti nyereségének elemzéséhez $n = 40$ elemes mintát vizsgált (ezer hrn.):

87	94	99	90	90	87	85	87
90	94	87	87	82	90	94	90
85	85	87	94	81	82	87	97
90	94	85	91	87	85	90	82
94	90	94	82	97	81	85	87

Az adatokból határozzuk meg: a) a minta terjedelmét; b) állítsunk össze gyakorisági táblázatot!

● **Megoldás.** a) Írjuk ki a mintában szereplő különböző adatokat: 87; 94; 99; 90; 85; 82; 81; 97.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a minta terjedelmét, rendezzük a minta elemeit növekvő sorrendbe: 81; 82; 85; 87; 90; 94; 97; 99.

Ezért $r = 99 - 81 = 18$.

b) Számoljuk össze az adatok gyakoriságát, és állítsuk össze a gyakorisági táblázatot:

x_i	81	82	85	87	90	94	97	99
n_i	3	4	6	9	8	7	2	1

2. Ukrajna megyéiben a 2010-es évi hústermelést vizsgálták január–október időszakban. Az alábbi adatokat kapták (ezer tonna):

166; 73; 90; 206; 115; 52; 50; 63; 73; 211; 47; 47; 129; 34; 50; 52; 55; 44; 41; 90; 55; 50; 363; 47; 47.

Határozd meg a minta móduszát, mediánját, terjedelmét!

● **Megoldás.** Rendezzük a minta adatait növekvő sorrendbe:

34; 41; 44; 47; 47; 47; 47; 50; 50; 50; 52; 52; 55; 55; 63; 73; 73; 90; 90; 115; 129; 166; 206; 211; 363.

Ezért a minta módusza 47 (4-szer fordul elő), mediánja 55 (a 25 elem 13. tagja), terjedelme 329 (363 – 34).

Szóbeli feladatok

671. Határozd meg az alábbi 20 elemű minta móduszát és mediánját:

a) –1; –1; 0; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8;

b) 3; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 11; 11; 11!

672. Határozd meg az alábbi minta átlagát:

a) –10; –9; –8; –7; 0; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

b) 0; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 1; 0!

673. Az alábbi táblázat Kijev átlagos relatív páratartalmát foglalja össze (%-ban). Határozd meg a minta terjedelmét!

Január	Február	Március	Április	Május	Június
82	80	76	67	63	69
Július	Augusztus	Szeptember	Október	November	December
72	70	75	78	84	86

A

674. Határozd meg az alábbi minta móduszát és mediánját: 28; 29; 29; 30; 31; 32; 32; 32; 32; 33!

675. Adott a 3, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 1 minta. Határozd meg a minta statisztikai sorát, terjedelmét, móduszát és mediánját!

676. A 149. oldalon lévő gyakorisági táblázat alapján határozd meg:

a) a 26-os méret gyakoriságát és viszonylagos gyakoriságát;

b) hányszor kevesebb 26-os méretű lábbelit kell gyártani, mint 29-es méretűt!

677. A minta tartalmazza az összes 10-nél kisebb természetes számot és a 6, 8, 8 és 13-as számokat. Írd le a minta variációs sorát! Határozd meg a minta terjedelmét, móduszát és mediánját!

678. Az 1, 2, 3, 4, 5 adatok gyakorisága megfelelően 3, 4, 6, 2 és 3, összesen 18 variáns. Határozd meg a minta terjedelmét, móduszát és mediánját!

679. Egy matematikavizsgán 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 és 12 osztályzatot kapott megfelelően 2, 9, 8, 10, 20, 17, 4, 6, 4 tanuló. Állíts össze gyakorisági táblázatot, és határozd meg a leggyakoribb és legritkább érdemjegy viszonylagos gyakoriságát!

680. A kiskatonák egészségügyi ellenőrzésekor (megengedett megterhelésnél), a vérnyomásmérés eredményét a következő táblázat szemlélteti:

x_i	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130
n_i	5	20	30	40	40	30	20	10	3	2

Határozd meg a minta ismérveit!

B

681. Határozd meg: a) 100-nál nem nagyobb természetes szám; b) minden olyan egész x szám, melyre $-110 \leqslant x \leqslant 110$ átlagát!

682. Egy minta 60 számból áll. A 3-as szám 10-szer fordul elő, a 4-es 20-szor, az 5-ös 30-szor. Határozd meg a minta átlagát, móduszát, mediánját!

683. Egy minta tartalmazza a 20-nál nagyobb és 50-nél kisebb természetes számokat, valamint a 13, 31, 31 és 32 számot! Határozd meg a módusztot, a mediánt, az átlagot!

684. Öt nap alatt tíz darab tök tömege megfelelően 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 és 2,9 kg-mal gyarapodott. Határozd meg egy tök napi átlagos tömeggyarapodását!

685. Az *Antej* repülőgép próbarepüléseinél az iránytól és a szél sebességétől függően az alábbi sebességeket mérték (km/h-ban):

235	231	234	239	238	232	237	239	230	240
231	238	239	235	233	233	240	234	239	240
230	230	232	240	230	234	240	235	239	236

Állítsd össze a minta variációs sorát és gyakorisági táblázatát!

686. Válassz ki két különböző irodalmi mű egy-egy részletét (1 oldalt), és olvasd el! Állíts össze a részletek alapján az „a", „b", „n", „o", „cs" és „á" betűk gyakorisági táblázatát! Hasonlítsd őket össze!

687. Igaz-e, hogy az adatok átlagtól való eltérések összege 0? Hozz fel példát! Válaszodat indokold!

688. Határozd meg a selejtes termékek átlagos százalékos arányát a következő táblázat alapján!

A termék tételszáma	A termék darabszáma	A selejtes termékek százalékos aránya	A selejtes termékek darabszáma
I	2000	3,4	68
II	1420	2,46	35
III	408	0,49	2
Összesen	3828		105

689. Az a_1, a_2, a_3, ..., a_n n darab szám összegének jelölésére a $\sum_{i=1}^{n} a_i$ jelet használják (az összeg jele a nagy szigma). Írd le ezzel a jellel n szám átlagát és négyzetes átlagát!

690. Három marós szakmunkásnak 5 egyforma alkatrészt kellett elkészítenie, melyek hossza 235 mm. A munkások az alábbi hibákkal dolgoztak (mm-ben):
az első: 0,2; –0,2; –0,5; 0,3; 0,4;
a második: 0,1; 0,5; –0,2; –0,4; 0,5;
a harmadik: 0,5; –0,1; –0,4; 0,3; 0,4.
Határozd meg a munkások hibáinak négyzetes átlagát!
Melyik munkás dolgozott a legprecízebben?

Ismétlő feladatok

691. Írd fel az $y = 2x^3 + 1$ függvény grafikonjához az $x_0 = 1$ pontba húzott érintő egyenletét!

692. Egy személygépkocsi árát először 10%-kal növelték, majd 10%-kal csökkentették. Hogyan változott a gépkocsi ára az áremelés és árcsökkentés után?

693. Ábrázold az alábbi függvényeket:
a) $y = x + 2$; b) $y = x^2 + 2$; c) $y = -x + 2$; d) $y = -x^2 + 2$!

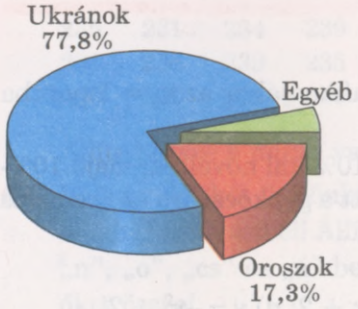
21. §. A minta grafikus megadása

A statisztikai adatokat táblázatba foglalják. Statisztikai táblázatnak nevezzük az olyan táblázat, melyben az adatokat a statisztikai sokaság általános jellemzői szerint célszerűen rendszerezve tüntetik fel. Mint ahogy a nyelvtanban a mondatnak, úgy a statisztikai táblázatnak is van *alanya* és *állítmánya*. Az alany a tárgyak, jelenségek, tulajdonságok, melyek szerepelnek a táblázatban. Az állítmány a számszerű jellemzőik. Például az alábbi táblázatban, amely néhány országban 1995-ben betakarított termények összmennyiségét tartalmazza, az alany a bal oszlop, az állítmány a többi oszlop számadata.

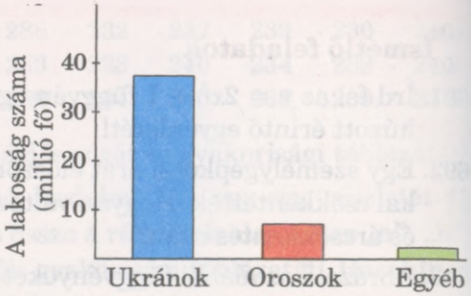
Ország	Búza	Rozs	Árpa	Összesen
Kína	101	0,6	–	400
USA	67	0,3	9,9	353
Oroszország	46	13,9	25,5	103
Franciaország	33	–	10,5	60
Németország	16	2,4	12,2	35
Ukrajna	19	1,2	10,1	34

Egyik vagy másik minta jellemzőit gyakran grafikusan, diagrammal szemléltetik. A *diagram* szó görög eredetű, jelentése rajz, ábra. Az az igazság, hogy manapság ezt a szót nem akármilyen rajzra használjuk, hanem azokra a rajzokra, melyek halmazok arányát, struktúrákat, algoritmusokat ábrázolnak. Halmazok viszonyát (összefüggését) leggyakrabban fával vagy Euler diagramon szemléltetik (lásd a 83–85. és 87. ábrákat).

A struktúrák modelljeit, osztályokat, állapotokat célszerű kördiagramon ábrázolni. A 90. és 91. ábrán kördiagramon és oszlopdiagramon szemléltetik Ukrajna különböző nemzetiségeinek számarányát (a 2001. évi népszámlálási adatai szerint)!



90. ábra.



91. ábra

Azt a diagramot, ahol az oszlopokat egymás mellé illesztik, *hisztogrammának* nevezzük. A 92. ábrán az alábbi táblázatnak megfelelő hisztogram látható. A táblázat egy üzemrészleg munkásainak fizetési osztályba sorolását tartalmazza. Egyes esetekben eloszlást hisztogram helyett *poligonon* szemléltetik, összekötve a hisztogram szomszédos oszlopainak felső felezőpontjait (93. ábra). Léteznek másfajta diagramok is.

Fizetési osztály	1	2	3	4	5	6	Összesen
A munkások száma	2	3	5	14	20	6	50

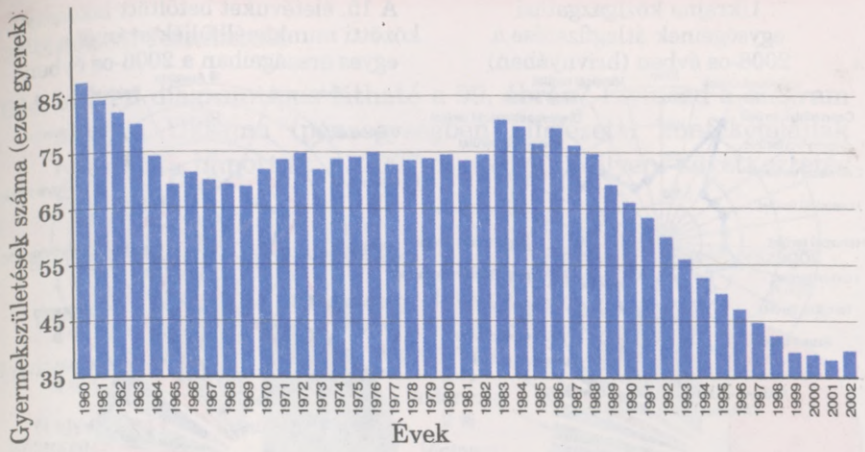


92. ábra

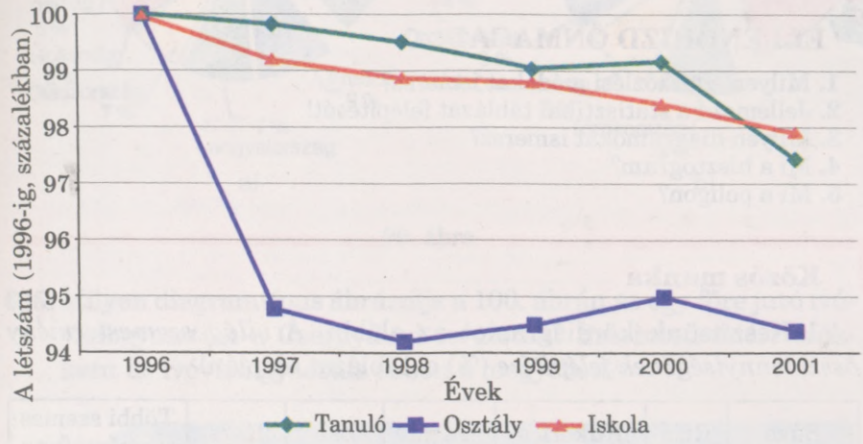


93. ábra

Bizonyos jelenségek változását célszerű oszlopdiagramon vagy grafikonon ábrázolni. A 94. ábra például az ukrajnai gyermekszületések számát szemlélteti 1960 és 2002 között. A 95. ábra pedig az ukrajnai vidéki iskolák tanulói létszámának, osztályainak és iskoláinak dinamikáját szemlélteti.



94. ábra



95. ábra

A szociológiában gyakran polárkoordináta-rendszert alkalmaznak.

Húzzunk a síkon egy OX félegyenest! A sík bármely M pontjának helyzetét egyértelműen meghatározza két szám: $r = OM$ és $\varphi = XOM\angle$. Az ilyen koordináta-rendszert *polárkoordináta-rendszernek* nevezzük, az O pont a rendszer *pólusa*.

Az alábbi két diagramon (96. és 97. ábra) az O pólustól távolabbi pontnak megfelelő értékek nagyobbak, a közelebbiek pedig kisebbek. Elemezzétek ezeket a diagramokat!

Ukrajna közigazgatási egységeinek átlagfizetése a 2006-os évben (hrivnyában)



96. ábra

A 15. életévüket betöltött lakosság közötti munkanélküliek aránya a világ egyes országaiban a 2006-os évben



97. ábra

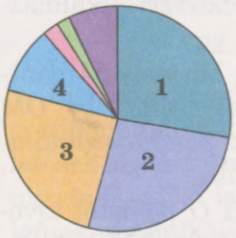
ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Milyen adatközlési módokat ismersz?
2. Jellemezd a statisztikai táblázat felépítését!
3. Milyen diagramokat ismersz?
4. Mi a hisztogram?
5. Mi a poligon?

Közös munka

1. Készítsünk kördiagramot az alábbi, *A világ szemestermény összmennyiségének felépítése* (%) c. táblázat alapján!

Búza	Rizs	Kukorica	Árpa	Zab	Rozs	Többi szemes termény fajta
28	26	25	10	2	2	7



98. ábra

● **Megoldás.** 100% 360°-nak felel meg, akkor 1% – 3,6°. A táblázat adatait megszorozva 3,6-tal, kapjuk a megfelelő értékeket:

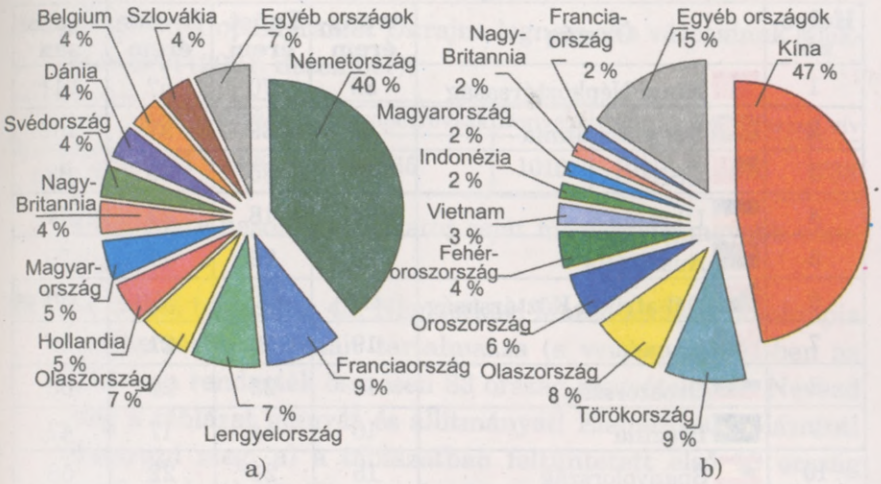
100,8°; 93,6°; 90°; 36°; 7,2°; 7,2°; 25,2°.

Ha lemérjük a körlap középpontjától a megfelelő középponti szögeket, megkapjuk a szükséges diagramot (98. ábra).

Nagyon egyszerű oszlopdiagramot vagy más diagramot készíteni Microsoft Graph (Beszúrás/ Objektum/ Microsoft Graph diagram parancssor) vagy Excel programmal.

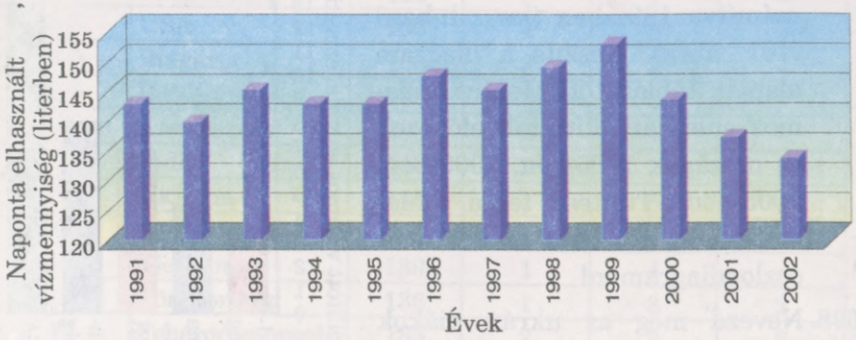
Szóbeli feladatok

694. Milyen diagramtípus látható a 99. ábrán? Elemezd a diagram alapján Ukrajna (pénzegységben kifejezett) konfekciójának exportját, importját a 2007-es évben! Milyen következtetés vonható le?



99. ábra

695. Milyen diagramtípus ábrázolja a 100. ábrán az egy főre jutó ivóvízfogyasztást a Csernyihivi területen? Szerinted miért csökkent az ivóvízfogyasztás ebben a megyében?



100. ábra

696. Elemezd a 2008-as paraolimpia nyerteseit feltüntető táblázatot! Válaszolj a feltett kérdésekre!

a) Hány érmet szerzett Ukrajna?

b) Mely ország sportolói szereztek ugyanannyi ezüst (bronz) érmet?

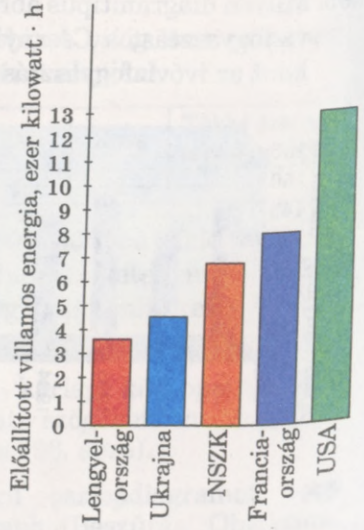
c) Mely ország sportolói nyerték a legkevesebb ezüst (bronz) érmet?

Helyezés	Ország	Arany-érem	Ezüst-érem	Bronz-érem	Összesen
1	Kínai Népköztársaság	89	70	52	211
2	Nagy-Britannia	42	29	31	102
3	USA	36	35	28	99
4	Ukrajna	24	18	32	74
5	Ausztrália	23	29	27	79
6	Dél-afrikai Köztársaság	21	3	6	30
7	Kanada	19	10	21	50
8	Oroszország	18	23	22	63
9	Brazília	16	14	17	47
10	Spanyolország	15	21	22	58

A

697. Olvasd le a diagramról, mennyi villamos energiát állítottak elő az egyes országok egy főre számítva 1992-ben (kw · h-ban) (101. ábra). Készíts a diagram alapján táblázatot! Mennyi villamos energiát állítottak elő ezek az országok 1995-ben, 2000-ben, 2005-ben? Tüntesd fel a táblázatban, és ábrázold az adatokat oszlopdiagramon!

698. Nevezd meg az ukrán diákok matematikai olimpiákon elért helyezéseit szemléltető táblázat alanyát és állítmányát!.



101. ábra

Év	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Helyezés	21	17	23	18	6	8	12	13	8

699. Ukrajnában a mezőgazdasági területek megközelítő aránya: őszi búza – 23%; más szemes termények – 22%; takarmánynövények – 37%, ipari növények – 12%, burgonya és zöldség – 6%. Készíts az adatok alapján kördiagramot!

700. Készíts oszlopdiagramot Ukrajna legnagyobb városainak lélekszámáról (2001. december)!

Város	Kijev	Harkiv	Dnyipropetrovszk	Donyeck	Odessza	Zaporizzsa	Lviv
Lakosság, ezer fő	2611	1470	1065	1016	1029	815	733

Állíts össze hasonló táblázatot saját megyéd legnagyobb városairól!

701. Az alábbi táblázat a 42. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia legsikeresebb csapatait tartalmazza (a versenyt 2001-ben az USA-ban rendezték összesen 83 ország részvételével). Nevezd meg a táblázat alanyát és állítmányát! Elemezd a táblázatot! Határozd meg: a) a táblázatban feltüntetett első 10 ország pontjainak átlagát; b) az utolsó 10 ország pontjainak átlagát! A kapott értékeket hasonlítsd össze mind a 15 ország átlagával!

Helyezés	Ország	Pontok	Érmek		
			arany	ezüst	bronz
1	Kína	225	6	–	–
2–3	Oroszország	196	5	1	–
2–3	USA	196	4	2	–
4–5	Bulgária	185	3	3	–
4–5	Dél-Korea	185	3	3	–
6	Kazahsztán	168	4	1	–
7	India	148	2	2	2
8	Ukrajna	143	1	5	–
9	Tajvan	141	1	5	–
10	Vietnam	139	1	4	–
11	Törökország	136	1	3	2
12	Fehéroroszország	135	2	2	2
13	Japán	134	1	3	2
14	Németország	131	1	3	1
15	Románia	129	1	2	2

702. A következő táblázat az 50. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia legsikeresebb csapatait tartalmazza (a versenyt 2009-ben Németországban rendezték meg több mint 100 ország részvételével). Elemezd a táblázatot! Hasonlítsd össze a 701. feladat táblázatával! Határozd meg a diákolimpia minden feladatának átlagát! A kapott adatokat ábrázold grafikonon!

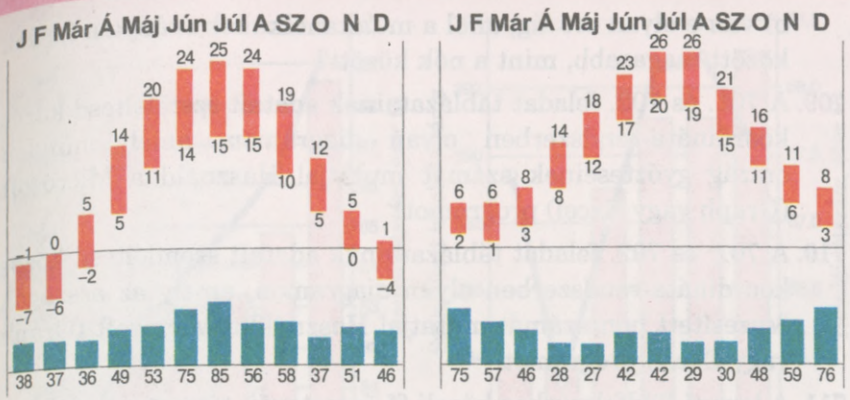
Ország	Érmek			A feladatokra kapott pontok						Σ	Helyezés
	A	E	B	1	2	3	4	5	6		
Kína	6	–	–	42	42	42	42	42	11	221	1
Japán	5	–	1	42	42	34	33	42	19	212	2
Oroszország	5	1	–	42	39	31	42	42	7	203	3
Dél-Korea	3	3	–	42	42	22	40	42	0	188	4
Koreai Népi Demokratikus Köztársaság	3	2	1	42	35	24	39	36	7	183	5
USA	2	4	–	42	42	20	33	42	3	182	6
Thaiföld	1	5	–	42	42	17	40	40	0	181	7
Törökország	2	4	–	42	42	23	32	38	0	177	8
Németország	1	4	1	42	33	11	38	37	10	171	9
Fehéroroszország	1	4	1	37	34	15	39	42	0	167	10
Olaszország	2	2	2	42	38	18	29	38	0	165	11–12
Tajvan	1	5	–	42	38	4	35	42	4	165	11–12
Románia	2	2	2	39	42	15	28	36	3	163	13
Ukrajna	3	1	2	36	42	14	33	31	6	162	14
Vietnam	2	2	2	36	38	16	37	30	4	161	15–16
Irán	1	4	1	42	42	10	30	34	3	161	15–16

703. Az alábbi táblázat egy iskola fiú tanulóinak magasság-eloszlását tartalmazza:

Magasság, cm	150	155	160	165	170	175	180
Fiúk száma	1	4	5	15	25	8	2

Ábrázold hisztogrammán és poligonon az adatsort!

704. A 102. ábra Kijev (*a*) és Jalta (*b*) klimatogramját szemlélteti, melyen feltüntették a havi (a hónapokat kezdőbetűjükkel jelölték) csapadékmennyiséget (mm-ben, égszínkék) és átlaghőmérsékletet (°C-ban, piros szín). Elemezd ezeket a diagramokat! Nevezd meg a leginkább azonos és a leginkább különböző tulajdonságokat! Hasonlítsd össze őket havonként! Készítsd el városod klimatogramját!



a) b)

102. ábra

B

705. A 696. feladat táblázata alapján készíts néhány oszlopdiagramot! Adj címet ezeknek az oszlopdiagramoknak!

706. Elemezd a 99. ábra diagramját!

a) Mely országok Ukrajna legnagyobb importőrei (exportőrei) konfekcióból?

b) Melyik ország egyidejűleg importál Ukrajnába és exportál is innen konfekciót?

c) Rajzold meg közös koordináta-rendszerben Ukrajna konfekciójának exportját és importját szemléltető poligont a b) pontban felsorolt országokra!

707. Elemezd a 96. ábrán látható diagramot! Készítsd el az adatok gyakorisági táblázatát! Határozd meg a minta móduszát, mediánját és terjedelmét! Felelj az alábbi kérdésekre:

a) melyik területen volt ebben az időben az átlagfizetés a legalacsonyabb;

b) hány területen volt az átlagfizetés 1000 hrivnya körüli?

708. Elemezd a 97. ábrán látható diagramot! Készítsd el az adatok gyakorisági táblázatát! Határozd meg a minta móduszát, mediánját és terjedelmét! Felelj az alábbi kérdésekre:

a) mely országban a legmagasabb és melyikben a legalacsonyabb a munkanélküliek aránya;

b) van-e olyan ország, ahol a munkanélküliek aránya a férfiak között magasabb, mint a nők között?

709. A 701. és 702. feladat táblázatainak adatait szemléltesd közös koordináta-rendszerben olyan diagramon, amely minden ország győzteseinek számát mutatja! Használd a Microsoft (Graph vagy Excel) programot!

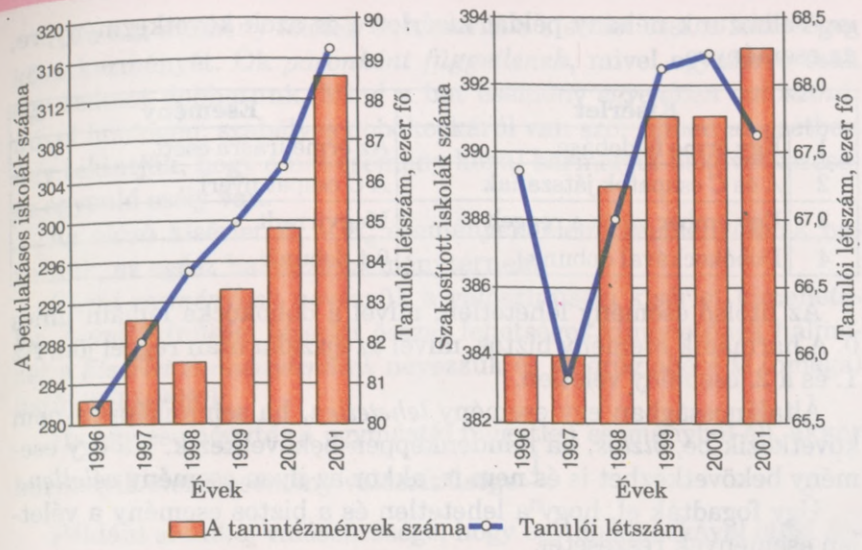
710. A 701. és 702. feladat táblázatainak adatait szemléltesd közös koordináta-rendszerben olyan diagramon, amely az országok összesített pontszámát mutatja! Használd a Microsoft (Graph vagy Excel) programot!

711. A levegő földfelszínhez közeli fő összetevői: nitrogén a térfogat 78,08%-a, oxigén a térfogat 20,96%-a, nemesgázok a térfogat 0,94%-a. Ezeknek a gázoknak az aránya a levegőben nem változik, ezért ezeket a gázokat a levegő állandó összetevőinek nevezzük. Készítsd el e levegő összetételének kördiagramját! A térfogat hány százalékát teszi ki a többi gáz?

712. Az alábbi táblázat néhány emlős tejének összetételét tartalmazza. Ábrázold mindegyik emlős tejének összetételét külön kördiagramon! Melyik grafikus ábrázolás szemléltetné legjobban a tejek összetételei közötti különbségeket? Készítsd el a legjobban szemléltető ábrázolást!

Összetevők, %	A tej %-os összetétele				
	tehén	bárány	kecske	kanca	rénszarvas
Víz	87,5	82,7	86,6	90,1	66,9
Szénhidrát	4,8	6,3	3,9	5,9	2,8
Zsír	3,5–4,2	5,3	3,7	1,5	16,9
Fehérje	3,5	4,6	4,2	2,1	16,9
Nyomelemek	0,7	0,9	0,8	0,4	1,2

713. A 103. ábra az ukrajnai bentlakásos iskolák és a szakosított középiskolák számának és azok tanulói létszámának változását szemlélteti. Hasonlítsd össze ezeket a diagramokat és grafikonokat! Hogyan változott 1996 és 2001 között: a) a bentlakásos iskolák száma; b) a bentlakásos iskolák tanulói létszáma? Mennyivel? Hányszorosára?



103. ábra

Ismétlő feladatok

714. Melyik az a kétjegyű szám, amely 4-szer nagyobb számjegyei összegénél, és 2-szer több számjegyei szorzatánál?

715. Számítsd ki: a) P_5; b) A_7^5; c) C_6^3!

716. Határozd meg az alábbi függvények derivált függvényeit:
a) $y = e^{2x}$; b) $y = 2^x$; c) $y = \ln x$; d) $y = \log_5 x$!

22. §. Véletlen események és azok valószínűsége

Különböző folyamatok modelljeinek felépítése és vizsgálata, melyek összefüggésben vannak a véletlen fogalmával – a matematikai statisztika és a valószínűség-számítás területe. Ilyen folyamatokra példa a termelésben és a banki műveleteknél a kockázat (kockázatos műveletek), a növények, állatok vagy emberek tömeges megbetegedése, szerencsejátékok.

Az előző fejezetek már adtak elképzelést a matematikai statisztikáról, most egy kicsit kiszélesítjük ismereteiteket a valószínűségszámításról.

A 9. osztályban már megtanultátok, hogy a valószínűség-számítás legfontosabb fogalma a *valószínűségi kísérlet* (próba, megfigyelés), *esemény* (a próba következménye) és az *esemény valószínűsé-*

ge. Felhozunk néhány példát kísérletre és azok következményére, az eseményre.

	Kísérlet	Esemény
1	Egy érme feldobása	Az érme írásra esett
2	*A* és *C* csapatok játszanak	A *C* csapat nyert
3	Egy ember várja a reggelt	Megvirradt
4	Dobókockával dobunk	0-t dobunk

Az utolsó esemény lehetetlen, mivel a dobókocka lapjain nincs 0. A harmadik esemény biztos, mivel az éjszaka után reggel jön. Az 1. és a 2. esemény véletlen.

Általánosságban egy esemény *lehetetlen*, ha semmiképpen nem következik be, *biztos*, ha mindenképpen bekövetkezik. Ha egy esemény bekövetkezhet is és nem is, akkor az ilyen esemény *véletlen*.

Úgy fogadták el, hogy a lehetetlen és a biztos esemény a véletlen események részesetei.

Az eseményeket a latin ábécé nyomtatott nagybetűivel jelöljük, $A, B, C, \ldots$ vagy a latin ábécé betűjével és indexekkel, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jelöljük. Az esemény leírását kapcsos zárójelbe vesszük. Például a táblázat 3 eseményét így kell leírni:

$$A_3 = \{\text{megvirradt}\}.$$

Előre nem lehet megmondani, hogy egy véletlen esemény bekövetkezik-e vagy sem. Ha ez az esemény azonos körülmények között sokszor bekövetkezik, akkor az esemény bekövetkezésének valószínűségét egy számmal jellemezhetjük.



104. ábra

Ezt akkor tehetjük meg, ha a kísérletek száma véges és egyenlő eséllyel lehetséges. Tehát ha az elvégzett kísérletek körülményei között nincs olyan, mely alapján feltételezhetnénk, hogy az egyik esemény bekövetkezése valószínűbb, mint a másik.

Példa. Egy szabályos, homogén dobókockával (104. ábra) egyszer dobunk, és feljegyezzük a felső lapon lévő pontok számát. Egy ilyen kísérletnek 6 különböző kimenetele lehet:

$E_1 = \{\text{egyest dobtunk}\};$
$E_2 = \{\text{kettest dobtunk}\};$
$E_3 = \{\text{hármast dobtunk}\};$
$E_4 = \{\text{négyest dobtunk}\};$
$E_5 = \{\text{ötöst dobtunk}\};$
$E_6 = \{\text{hatost dobtunk}\}.$

Ez a hat esemény felöleli és kimeríti a kísérlet összes lehetséges következményét. Ők *páronként függetlenek*, mivel egyszerre csak egy számot dobhatunk. Mind a hat esemény *egyenlően valószínű*, mivel homogén, szabályos dobókockáról van szó. Ebben az esetben úgy tekintjük, hogy a hat esemény közül bármelyik bekövetkezésére egyenlő esély van.

Az előző kísérlet E_1 – E_6 eseményeit elemi eseményeknek nevezzük, az egész halmazt eseménytérnek.

Elemi eseménynek nevezzük a valószínűségi kísérlet kimenetelét. A valószínűségi kísérlet összes lehetséges kimenetének halmazát a *kísérlet eseményterének* nevezzük és a görög ábécé Ω (omega) betűjével jelöljük.

Ha egy eseménytér n egymástól független eseményből áll, akkor bármelyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{n}$.

Például annak a valószínűsége, hogy egy dobókockával ötöst dobunk, $\frac{1}{6}$, és annak a valószínűsége, hogy egy feldobott érme írásra esik, $\frac{1}{2}$. Az A esemény valószínűségét $P(A)$-val jelöljük. Ha az előző példa első eseményét A-val, a másodikat B-vel jelöljük, akkor $P(A) = \frac{1}{6}$ és $P(B) = \frac{1}{2}$.

Léteznek nem elemi események is.

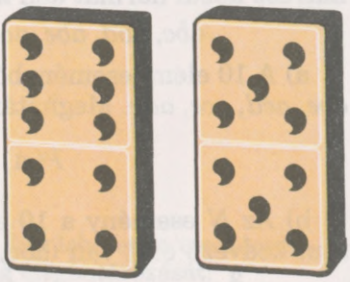
Példa. Vizsgáljuk a C = {a kihúzott dominókövön 10 pötty van} eseményt

Mivel összesen 28 dominókő van, ezért egy dominókő kihúzásának 28 egyenlő esélyű egymástól független kimenetele lehet. Tehát ennek a kísérletnek az eseménytere 28, E_i elemi eseményből áll, ahol $i = 1, 2, 3, \ldots, 28$. A C esemény akkor következik be, ha az alábbi elemi esemény valamelyike következik be (105. ábra):

1) E_1 = {a kihúzott dominókő a $\frac{4}{6}$};

2) E_2 = {a kihúzott dominókő az $\frac{5}{5}$}.

Mivel a C eseménynél két elemi esemény a kedvező (az E_1 és az E_2), az összes lehetséges pedig 28, így $P(C) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$.



105. ábra

Nézzük meg az általános esetet. Legyen egy kísérletnek n, véges számú, független, azonos valószínűségű kimenetele és A, a kísérlethez tartozó véletlen esemény.

Az E_n elemi esemény az A *véletlen esemény számára kedvező*, ha az E_n esemény bekövetkezése az A esemény bekövetkezését eredményezi.

Ha az A véletlen esemény számára kedvező események számát $n(A)$-nel jelöljük, akkor az A véletlen esemény bekövetkezésének valószínűségét az alábbi képlettel határozzuk meg:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Az A véletlen esemény valószínűségének az A esemény számára kedvező esetek n(A) számának és az eseménytér összes független egyenlő esélyű eseményei számának arányát nevezzük.

Ez a klasszikus valószínűség meghatározása.

Soroljuk fel a véletlen események valószínűségének főbb tulajdonságait:

1) ha a C esemény lehetetlen, akkor $P(C) = 0$;

2) ha a B esemény biztos, akkor $P(B) = 1$;

3) ha az X esemény véletlen, akkor $0 \leqslant P(X) \leqslant 1$;

4) ha $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ olyan események, melyek kimerítik egy kísérlet összes kimenetelét, tehát eseményteret alkotnak, akkor

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1.$$

1. feladat. Egy mosógép tesztelésénél megállapították, hogy öt, a, b, c, d és e alkatrész közül az egyik selejtes. Egyidejűleg három alkatrészt lehet vizsgálni, melyeket a gépész tetszőlegesen választhat ki. Mi a valószínűsége annak, hogy:

a) leellenőrzi az a alkatrészt (M esemény);

b) leellenőrzi az a és b alkatrészt (N esemény);

c) az a és b alkatrész közül legalább az egyiket leellenőrzi (K esemény)?

● **Megoldás.** Hozzuk létre a kísérlet elemi eseményterét (5 alkatrész közül hármat kell kiválasztani). Azt kapjuk, hogy:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

a) A 10 elemi eseményből 6 kedvező az M eseménynél: *abc, abd, abe, acd, ace, ade*. Meghatározhatjuk az A esemény valószínűségét:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

b) Az N esemény a 10 eseményből három esetben teljesül, három kedvező eset van (*abc, abd, abe*), ezért az N esemény valószínűsége $\frac{3}{10}$.

c) A K esemény a 10 elemi eseményből 9 esetben teljesül, 9 a kedvező esetek száma (mind, kivéve a *cde* eseményt), ezért a K esemény valószínűsége $\frac{9}{10}$.

A valószínűségi számításokban gyakran segítenek a kombinatorika szabályai és képletei.

2. feladat. Egy hegy tetejére 4 egyformán kényelmes ösvény vezet. Mennyi a valószínűsége, hogy te ugyanazon az ösvényen mégy fel és ereszkedsz le, mint amelyiken valamikor az egyik barátot is felment és lejött a hegyről?

● **Megoldás.** Összesen $4 \cdot 4 = 16$ különböző útvonal lehetséges. Mindegyik egyformán kényelmes, ezért annak a valószínűsége, hogy az egyik útvonalon haladj végig $\frac{1}{16}$.

3. feladat. Egy tanuló az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekkel egy ötjegyű számot írt le. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre eltaláljuk a tanuló által felírt számot?

● **Megoldás.** Összesen $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ilyen szám van. Annak a valószínűsége, hogy egyet eltaláljunk $\frac{1}{120}$.

4. feladat. Egy kosárban 20 azonos alma volt, 15 édes és 5 savanyú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kosárból véletlenül kivett két alma savanyú?

● **Megoldás.** 20 almából kettőt C_{20}^2-féleképpen lehet kiválasztani, 5-ből kettőt C_5^2-féleképpen:

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190; \; C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Ezért a keresett valószínűség $P = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mely esemény véletlen?
2. Hozz fel példákat véletlen eseményekre!
3. Mely esemény lehetetlen; biztos?
4. Hozz fel példákat eseménytérre!
5. Melyik esemény elemi? Hozz fel példákat!
6. Mennyi a biztos esemény valószínűsége? És a lehetetlen eseményé?
7. Fogalmazd meg a klasszikus valószínűség meghatározását!
8. Hogyan lehet a valószínűséget kombinatorikai képletekkel kiszámítani?

Közös munka

1. Egy lefordított dominókészlet 28 kövéből véletlenszerűen kiválasztunk egy követ. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kő egyik térfelén egy pont van (*A* esemény)?

● **Megoldás.** Számoljuk össze, hány olyan dominókő van, melynek egyik felén egy pont van: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}$. Ez összesen hét dominókő. 28 választási lehetőségünk van, mivel a 28 kő bármelyikét elvehetjük. Tehát $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Felelet: 0,25.

2. Négy kártyalapra az *E*, *M*, *Z* és *Ő* betűket írták. A kártyákat összekeverték és kirakták egy sorba. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a MEZŐ szót rakják ki?

● **Megoldás.** Négy kártyának $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ permutációja van, viszont a feladat feltételeinek csak egy felel meg. Tehát a keresett valószínűség $P = \frac{1}{24}$.

3. Egy ezer szelvényes lottóban 1 olyan szelvény van, aminek a nyereménye 5000 hrivnya, 10 szelvénnyel 1000 hrivnyát lehet nyerni, 50-nel 200 hrivnyát, 100 szelvénnyel 50 hrivnyát. A többi szelvény nem nyerő. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szelvénnyel nem kevesebb, mint 200 hrivnyát lehet nyerni?

● **Megoldás.** A 200-nál nem kevesebb nyereményt jelentő szelvények száma $1 + 10 + 50 = 61$. Összesen 1000 szelvény van. Ezért a keresett valószínűség $61 : 1000 = 0{,}061$.

4. Egy diák úgy ment el vizsgázni, hogy a 25 kérdésből csak 20-at tanult meg. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott tétel három kérdése közül legalább két kérdésre tudja a választ?

● **Megoldás.** Összesen C_{25}^3 tétel lehetséges. Ebből C_{20}^3 olyan tétel van, ahol mind a három kérdésre tudja a választ. Viszont C_{20}^2 olyan tétel van, ahol két kérdésre tudja a válasz.

Ha ezekhez a kérdésekhez még egyet hozzá teszünk abból az 5-ből melyeket nem tanult meg, akkor még $5 \cdot C_{20}^2$ tételt kapunk, melyek két kérdését tudja.

Tehát a keresett valószínűség

$$P = (C_{20}^3 + 5 \cdot C_{20}^2) : C_{25}^3 = (1140 + 950) : 2300 = \frac{209}{230}.$$

Szóbeli feladatok

717. Az alábbiak közül melyik esemény a valószínűség-számítás szerint:
a) egy dobókockával hatost dobunk;
b) kiég a konyhai villanykörte;
c) egy páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az origóra;
d) egy véletlenül kiválasztott kétjegyű szám páros;
e) a Napon a hőmérséklet kisebb, mint a Földön?

718. Írd le az alábbi kísérletek eseményterét:
a) Ukrajna bármely véletlenül kiválasztott állampolgára számára a születésnapjának megállapítása;
b) a másodfokú egyenlet különböző gyökeinek meghatározása;
c) közös koordináta-rendszerben ábrázolt körvonal és parabola közös pontjai számának magállapítása;
d) 6 napos munkahétnél egy plusz szabadnap beiktatása!

719. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy dobókockával páros számot dobunk?

720. Mennyi a valószínűsége annak, ha egy érmét feldobunk, az fejre; írásra esik?

721. Véletlenszerűen válassz ki egy dominókövet. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott dominókő mindkét térfelén: a) azonos a pöttyök száma; b) nem azonos a pöttyök száma?

722. Egy osztályban 10 fiú és 20 lány tanul. Mennyi a valószínűsége, hogy először: a) egy lányt; b) egy fiút; c) téged; d) vagy fiút vagy lányt hívnak ki a táblához?

723. Határozd meg a valószínűségét annak, hogy a barátod: a) vasárnap; b) ősszel; c) szeptemberben; d) január elsején született?

A

724. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy dobókockával: a) kettest; b) páros számot; c) három többszörösét dobjuk?

725. Véletlenszerűen válassz ki 28 lefordított dominókőből egyet. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott dominókövön összesen: a) kép pont van (A esemény); b) 5 pont van (B esemény); c) 12 pont van (C esemény)?

726. Véletlenszerűen válassz ki 28 lefordított dominókőből egyet. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott dominókő egyik felén 6 pont van (*A* esemény)?

727. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen kiválasztott egyjegyű természetes szám: a) a hetes; b) osztható 3-mal?

728. Egy színes fakockát 8 egybevágó kiskockára fűrészeltek szét (106. ábra), és a kiskockákat beletették egy dobozba. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobozból véletlenül kivett kockának: a) csak egyik lapja festett; b) két lapja festett; c) nem kevesebb, mint három lapja színes?



106. ábra

729. Egy fakocka minden lapját lefestettek, majd 64 egybevágó kiskockára szétfűrészeltek, és a kiskockákat beletették egy dobozba. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobozból véletlenül kivett kockának: a) csak egyik lapja festett; b) két lapja festett; c) nem kevesebb, mint három lapja festett?

730. Egy festett fakockát 125 egybevágó kiskockára fűrészeltek szét, és a kiskockákat beletették egy tarisznyába. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tarisznyából véletlenül kivett kocka: a) csak egyik lapja festett; b) csak két lapja festett?

731. Négyzet alakú kártyákra felírt betűkből a MATEMATIKA szót rakták ki, majd ezeket a kártyákat lefordították, összekeverték és egyet kivettek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kivett kártyán: a) az *A* betű van; b) az *M* betű van?

732. Képzeld el, hogy egy oktaéder lapjaira az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokat írták fel (107. ábra). Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen oktaéderrel: a) 7-et; b) 8-at; c) 9-et dobunk?



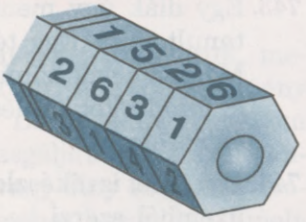
107. ábra

733. Egy tarisznyában 5 fehér és 7 fekete golyó van. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kivett golyó: a) fehér; b) fekete színű?

734. Egy étkezdében 3 első fogás – borscs, húsleves, bableves; 4 második fogás – derelye, töltött káposzta, fasírt, ragú;

2 desszert – fagylalt és sütemény volt az étlapon. Mennyi a valószínűsége annak, hogyha nem ismered a barátod ízlését, sikerül neki a kedvenceit rendelned: borscsot, fasírtot és fagylaltot?

735. Egy széf zárja négy hatoldalú hasábból áll (108. ábra). Minden hasáb lapjain számok vannak 1-től 6-ig. A hasábok forgatásával lehet beállítani a zárat, ami ezekkel a számjegyekkel felírható négyjegyű szám. A széf akkor nyílik ki, ha beállítják a kódot, ami egy négyjegyű szám. Mennyi a valószínűsége annak, hogyha nem ismered a zár kódját, első próbálkozásra sikerül azt kinyitnod?



108. ábra

736. Egy polcra tetszőleges sorrendben tettek fel egy négykötetes szótárt. Mennyi a valószínűsége, hogy a szótár kötetei a megfelelő sorrendben kerültek a polcra?

737. Egy kislány 7 különböző színű gyöngyszemet szeretett volna felfűzni. Az öccse felfűzte helyette. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az öccse ugyanolyan sorrendben fűzte fel, mint ahogy ő szerette volna?

738. Az asztalon 5 lefordított és összekevert kártya van. A kártyákra egy-egy betűt írtak: A, E, O, R és T. Mennyi a valószínűsége annak, hogy:

a) először az O betűt, majd az R és harmadiknak a T betűt fordítjuk meg;

b) három véletlenül megfordított kártyából kirakható az ORT szó?

739. Egy olyan 32 lapos kártyacsomagból, melyekre az ukrán ábécé betűit írták, 4 kártyát húzunk ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott betűkből ki lehet rakni a РОМБ szót?

B

740. Tíz alkatrészből kettő kiváló minőségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt véletlenül kivett alkatrész között csak egy kiváló minőségű?

741. Egy osztály tanulói közül 10-en angol nyelvet tanulnak, 8-an németet, 6-an franciát. Az osztály tanulói közül hármat kiválasztunk. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy: a) mind a hárman más idegen nyelvet tanulnak; b) mind a három tanuló

angolul tanul; c) mind a hárman ugyanazt az idegen nyelvet tanulják!

742. 100 alkatrész közül, melyek között két selejtes van, véletlenszerűen kivettek 6-ot. Határozd meg a valószínűségét annak, ha a 6 kivett alkatrész közül kettő selejtes!

743. Egy diák úgy ment el a vizsgájára, hogy 60 kérdésből 45-öt tanult meg. Egy tételben a 60 kérdésből 2 kérdés szerepelt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott tételből a diák: a) mind a két kérdésre tudta a választ; b) csak az egyikre tudott válaszolni?

744. Egy üzlet izzókészletének 30%-át egyik, 70%-át pedig egy másik üzemből szerzi be. Az első üzem által legyártott izzó 85%-a szabványos, a második által gyártott izzók 75%-a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ebben az üzletben vásárolt izzó szabványos?

745. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az $a_n = 3n + 2$, $n \leqslant 100$ sorozat véletlenül kiválasztott tagja 5 többszöröse? És ha $n \leqslant 1000$?

746. Tíz lottószelvény közül kettő nyerő. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kiválasztott 5 szelvény között: a) egy nyerő van; b) legalább egy nyerő?

747. Annak, aki a Sportlottón játszik, 49 szám közül kell 6-ot kiválasztani. Akkor nyer, ha 3, 4, 5 vagy 6 számot talált el. Számítsd ki a nyerési lehetőség valószínűségét minden esetben!

748. Mi valószínűbb:
a) 49-ből 3 számot vagy 36-ból 4 számot eltalálni;
b) 15-ből 7 számot vagy 15-ból 8 számot eltalálni;
c) 15-ből 3 számot vagy 15-ból 13 számot eltalálni?

Ismétlő feladatok

749. Határozd meg az $y = x^2$, $y = 6 - x$ görbékkel és az abszcisszatengellyel határolt síkrész területét!

750. Határozd meg az alábbi függvények deriváltfügvényeit:
a) $y = 2x^3 + 6x^2 - 5x$; b) $y = 2x^3(x^2 - 5)$;
c) $y = (x^2 - 5) : (2x^3)$!

751. Egy sportlövő azonos körülmények között 5 sorozatot lő ki a céltáblára. Minden sorozatban 100 lövése van. Az eredményeit táblázatba jegyzi fel. Az eredményt ábrázold oszlopdiagramon!

A sorozat sorszáma	1	2	3	4	5
A találatok száma	69	64	72	78	65

23. §. Az esemény relatív gyakorisága és véletlen mennyiségek

Eddig olyan elemi események valószínűségét számoltuk, melyeknél nem nagyon gondolkoztunk el azon, hogy az esemény „egyenlő valószínűséggel" következik be. De ez a fogalom nem olyan egyszerű, mint amilyennek tűnik. Vizsgáljuk meg a születendő gyerek nemének valószínűségét. A fiú vagy lány születése azonosan valószínűnek tűnhet (a feldobott érméhez hasonlóan, amely vagy fejre vagy írásra esik). De ennek ellentmond a valóság. Sok éves tapasztalat azt igazolta, hogy fiú gyakrabban születik. 1000 újszülött közül átlagosan 517 kisfiú és 483 lány. Tehát az, hogy 0,5 a valószínűsége annak, hogy fiú születik, ellentmond a valóságnak. Ilyen esetben a *statisztikai valószínűséget* alkalmazzák. Azt mondják: annak, hogy a megszületett gyermek kisfiú, a statisztikai valószínűsége 0,517, hogy lány 0,483.

Képzeljétek el: a dobókockát úgy készítik el, hogy az a lapja, melyen a hat pont van, messzebb van a kocka súlypontjától, mint a szemben lévő lap. Az ilyen kockával gyakrabban lehet hatost dobni. Ebben az esetben megfigyelhető egy érdekes és nagyon fontos törvényszerűség. Ha valaki egy ilyen kockával 1000-szer dobna, akkor körülbelül 300-szor dobna hatost, és ha más végezné el ezt a kísérletet ő is hasonló eredményre jutna.

Sok tömegesen előforduló véletlen eseménynek is van állandó tulajdonsága. Elég nagyszámú független kísérletnél a megfigyelt esemény bekövetkezésének gyakorisága egy érték körül ingadozik. Ennek az igazságában nagyon sok kutató tapasztalati úton győződött meg. Jakob Bernoulli, Pafnutyij Lvovics Csebisev és mások ezt az állítást elméleti úton is igazolták (nagy számok törvénye). Ezért az ilyen (statisztikailag állandó) eseményekre alkalmazhatjuk a valószínűség fogalmát.

Ha az A esemény n kísérletből m-szer következik be, akkor az $\frac{m}{n}$ tört határozza meg az A esemény *relatív gyakoriságát*. Sok valós esetben a kísérletek n számának növelésével a relatív gyakoriság állandósul, egyre kevésbe tér el egy p számtól (ha $n \to \infty$, akkor $\frac{m}{n} \to p$). Ezt a p számot nevezzük az A *esemény valószínűségének*.

Ez a statisztikai valószínűség meghatározása. Az így definiált fogalom szélesebb terjedelmű, mint a klasszikus valószínűség (lásd a 168. oldalt). A klasszikus valószínűséget matematikai módszerekkel határozzák meg, míg a statisztikait inkább vizsgálatokkal.

Ha valószínűségről van szó, akkor a szakemberek a statisztikai valószínűségre gondolnak. Ezért napjaink valószínűségszámítási-elmélete szorosan kapcsolódik a matematikai statisztikához. A matematikai statisztika és a valószínűség-számítás egyesítését *sztochasztikának* nevezzük. A sztochasztikus szó jelentése véletlen, valószínű.

A sztochasztika legfontosabb fogalma a *véletlen mennyiség*. Egy mennyiség véletlen, ha felvehet előre ismeretlen számértékeket, melyek a körülményektől függenek. Például:

a) nyeremény a lottón;

b) a puskagolyó becsapódási helye és a céltábla középpontja közötti távolság.

Az első véletlen mennyiség értékei egész számok. Az ilyen mennyiséget *diszkrét* mennyiségnek nevezzük. A második mennyiség értékhalmaza – a számegyenes egyik folytonos szakasza. Az ilyen mennyiség *folytonos*.

Feladat. 100 lottószelvényt bocsátottak ki, melyek közül 5 olyan van, amellyel 10 hrivnyát lehet nyerni, 10 szelvénnyel 5 hrivnyát, 40 szelvénnyel 1 hrivnyát, a többi nem nyerő szelvény. Mennyi az egy szelvényre jutó átlagnyeremény?

Ez a feladat egyszerű számtannal is megoldható:

$$(5 \cdot 10 \text{ hrn.} + 10 \cdot 5 \text{ hrn.} + 40 \cdot 1 \text{ hrn.}) : 100 = 1{,}4 \text{ hrn.}$$

Szemléltessük ezen a példán a véletlen esemény fogalmát. Itt a véletlen esemény az elnyerhető összeg: 0, 1, 5 vagy 10 (hrn.), megfelelően a hozzájuk tartozó 0,45; 0,4; 0,1 és 0,05 valószínűségekkel. Ez egy ξ diszkrét véletlen mennyiség. A leírt esetet az alábbi táblázat szemlélteti:

ξ	0	1	5	10
p	0,45	0,4	0,1	0,05

Figyeljétek meg: a második sorban a valószínűségek összege 1. Úgy fogadták el, hogy ebben az esetben a ξ, olyan véletlen mennyiség, ahol a p számok *valószínűségeloszlást* alkotnak.

Ha a ξ véletlen mennyiség $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ értéket rendre $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ valószínűséggel vesz fel, akkor ez azt jelenti, hogy a ξ mennyiség valószínűségeloszlása:

ξ_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Egy ilyen mennyiség átlagát *várható értéknek* nevezzük és $M(\xi)$ jelöljük.

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n.$$

Például az előbbi feladatban

$$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 1{,}4.$$

A véletlen mennyiség értékeinek a várható értéktől való eltérése négyzetének átlagát *szórásnégyzetnek* nevezzük. Az x változó szórását $D(x)$-szel jelöljük, és a $D(x) = M(x - Mx)^2$ képlettel lehet meghatározni, ahol Mx az x mennyiség várható értéke; $(x - Mx)^2$ az x változó és a várható érték négyzetes eltérése. Az $(x - Mx)^2$ mennyiség szintén véletlen. Ennek a véletlen mennyiségnek a várható értéke az x mennyiség szórásnégyzete: $M(x - Mx)^2$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk az előző példa ξ mennyiségének szórásnégyzetét, először határozzuk meg az összes érték eltérését a várható értéktől:

$$0 - 1{,}4 = -1{,}4;\ 1 - 1{,}4 = -0{,}4;\ 5 - 1{,}4 = 3{,}6;\ 10 - 1{,}4 = 8{,}6.$$

Ezen eltérések négyzete: 1,96; 0,16; 12,96; 73,96. Határozzuk meg a véletlen mennyiség várható értékét:

$(x - Mx)^2$	1,96	0,16	12,96	73,96
p	0,45	0,4	0,1	0,05

$$1{,}96 \cdot 0{,}45 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 12{,}96 \cdot 0{,}1 + 73{,}96 \cdot 0{,}05 = 5{,}94.$$

Ez a vizsgált véletlen mennyiség szórásnégyzete. $D(\xi) = 5{,}94$.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi egy esemény relatív gyakorisága?
2. Add meg a statisztikai valószínűség definícióját!
3. Mi a sztochasztika?
4. Mit jelent a véletlen mennyiség valószínűségeloszlása?
5. Mi a várható érték?
6. Mit nevezünk szórásnak?

Közös munka

1. Mi az exit poll felmérés? Miért hisznek neki?

Felelet: exit poll a szavazatukat leadottak körében készülő előzetes közvélemény-kutatás, amely azzal a céllal készül, hogy előrevetítsék a választás eredményeit a választási bizottság által kihirdetett eredmény előtt. Hihetünk a felmérés eredményének a

relatív gyakoriság állandósága alapján. Ha valamely pártra vagy jelöltre 100 szavazóból például 20% adta le a voksát (5%-os hibahatárral), akkor feltehető, hogy mindenki ugyanígy szavazott.

2. Határozzuk meg az x véletlen mennyiség várható értékét az alábbi táblázatban feltüntetett valószínűségi eloszlás alapján!

x	1	5	10	15
p	0,2	0,3	0,4	0,1

● Megoldás. $M(x) = 1 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}1 = 7{,}2$.

Szóbeli feladatok

752. Az alábbi táblázatok közül melyik add meg véletlen mennyiség valószínűségi eloszlását?

x	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,4

x	1	2	3	4
p	0,5	0,2	0,2	0,1

x	0	1	3	4
p	0,2	0,3	0,3	0,3

x	10	20	30	40
p	0,4	0,4	0,2	0,1

753. Ismeretes, hogy 1000 újszülött közül átlagosan 517 a fiú és 483 a lány. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy egy újszülött neme fiú!

754. Egy tanuló saját készítésű fa dobókockával százszor dobva az alábbi táblázatba foglalt eredményeket kapott:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Milyen értékeket kaphatunk, hogyha ugyanezzel dobókockával 1000 dobást végzünk?

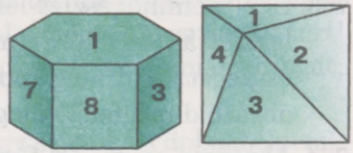
755. Képzeljünk el egy szabályos, hatoldalú hasáb alakú dobókövet, melynek az alaplapjaira az 1-es és 2-es számokat írták, az oldallapokra pedig a 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokat (109. *a* ábra). Milyen a különböző számok valószínűségi eloszlása a dobókővel történő többszöri dobás után?

A

756. Készítsd el egy szabályos dobókockával dobott értékek valószínűségi eloszlását! Határozd meg ennek a véletlen eseménynek a várható értékét!

757. Egy szabályos homogén dobókocka egyik lapját sárgára festették. Többszöri dobás után mennyi a relatív gyakorisága annak, hogy dobás után a kocka sárga lapja kerül felülre?

758. Egy szabályos oktaéder lapjaira számjegyeket írtak 1-től 8-ig (109. *b* ábra). Add meg az ilyen kockával dobható pontok értékét! Határozd meg a dobás átlagát!



a) b)

109. ábra

759. Egy cinkelt dobókocka esetén a dobott számok valószínűségi eloszlását az alábbi táblázat mutatja:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Töltsd ki a táblázat utolsó celláját! Határozd meg a ξ véletlen mennyiség várható értékét!

760. 1000 lottószelvényt bocsátottak ki. A szelvények között 1-gyel 100 hrivnyát lehet nyerni, 10 szelvénnyel 20 hrivnyát és 50 szelvénnyel 1 hrivnyát. Add meg táblázattal a véletlen mennyiséget! Határozd meg ennek a mennyiségnek a várható értékét!

B

761. Határozd meg az alábbi véletlen mennyiségek várható értékét és szórását!

φ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ψ	1	2	3	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Alkoss olyan valós szituációt, mely a φ és ψ mennyiséggel modellezhető!

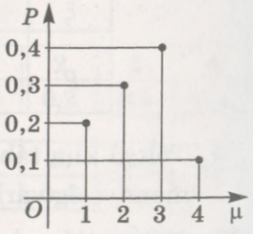
762. Egyszerre két dobókockával dobunk, és összeszámoljuk a dobott pontokat. Add meg az összeg véletlen eloszlását, és határozd meg a várható értékét!

763. Egy dominókészlet lefordított köveiből véletlenszerűen kiválasztottak egyet, és megszámolták a két felén lévő pontok összegét. Add meg táblázattal ezt a véletlen mennyiséget, és ábrázold megfelelő diagramon!

764. Ábrázold az $y = C_9^x$ függvény grafikonját! Sorold fel fontosabb tulajdonságait! Kösd össze a grafikon pontjait folyamatos görbével, a Gauss-görbéhez hasonlóan!

765. Ábrázold az $y = C_6^x$ függvény grafikonját! Állapítsd meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

766. A 110. ábrán a μ véletlen esemény eloszlása látható. Az eloszlás szabályát foglald táblázatba! Határozd meg a várható értékét és szórását!



110. ábra

767. Képzelj el egy olyan homogén játékkockát, amely szabályos négyoldalú hasáb, és alapéle 2 cm, magassága pedig 1,9 cm. Az alaplapokra az 1-es és 6-os számot írták, az oldallapokra pedig a 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös számot? Szerinted ennek a kockának a többszöri dobásával, milyen lesz a valószínűségi eloszlás? Próbáld kísérleti úton ellenőrizni a sejtésedet!

Ismétlő feladatok

768. Oldd meg intervallum módszerével az alábbi egyenlőtlenségeket:
a) $(x - 4)(x + 7) < 0$; b) $(x + 5)(x - 0{,}5) > 0$!

769. Illeszkedik-e az A pont az $y = 2^x$ függvény grafikonjára, ha:
a) $A(4; 16)$; b) $A(4; 256)$;
c) $A(-2; -0{,}5)$; d) $A(-2; 0{,}0625)$?

770. Adott az $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}$. Számítsd ki $f'(1)$ és $f'(-2)$ értéket!

5. számú önálló munka

1. változat

1. Egy minta elemei 1-től 10-ig minden természetes szám és még a 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7 és 8-as szám. Írd fel a megfelelő variációs sort! Határozd meg a minta terjedelmét, móduszát, mediánját, átlagát; készítsd el a minta hisztogramját!

2. Mennyi a valószínűsége annak, hogy szabályos dobókockával: a) páratlan számot dobunk; b) háromtól nagyobb számot dobunk?

3. Mi a valószínűbb: 9-ből 2 számot eltalálni vagy 8-ból 3-at?

4. Egy urnában 1-től 100-ig számkártyák vannak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kivett kártyán lévő számban nem szerepel az 5-ös számjegy?

5. Határozd meg a táblázatban feltüntetett véletlen esemény várható értékét és szórását!

j	1	2	3	4	5
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

2. változat

1. Egy minta elemei 0-tól 9-ig minden egész szám és még az 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, és a 7. Írd fel a megfelelő variációs sort! Határozd meg a minta terjedelmét, móduszát, mediánját, átlagát; készítsd el a minta hisztogramját!

2. Mennyi a valószínűsége annak, hogy szabályos dobókockával: a) 4-nél nagyobb számot dobunk; b) négynél kisebb számot dobunk?

3. Mi a valószínűbb: 9-ből 3 számot eltalálni vagy 8-ból 4-et?

4. Egy urnában 1-től 100-ig számkártyák vannak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kivett kártyán lévő szám számjegyeinek összege 7?

5. Határozd meg a táblázatban feltüntetett véletlen esemény várható értékét és szórását!

j	0	1	2	3	4
p	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Mi a statisztika?
2. Mi a minta? Hozz fel példákat!

3. Mi a minta eleme? Mi a variációs sor, statisztikai sor?
4. Mi a minta módusza, mediánja, átlaga?
5. Mi a hisztogram; a gyakoriság poligonja?
6. Hogyan kell meghatározni n szám négyzetes átlagát?
7. Mi a szórás? Hogyan kell kiszámítani?
8. Hozz fel példákat véletlen eseményekre!
9. Milyen eseményt nevezünk lehetetlennek? És biztosnak?
10. Hozz fel példát eseménytérre!
11. Mit nevezünk a véletlen esemény valószínűségének?
12. Mivel egyenlő a biztos esemény valószínűsége? És a lehetetlen eseményé?

Matematikatörténeti adalékok

Már nagyon régóta gyűjtik és elemzik az emberek a statisztikai adatokat. Kínában már 4 ezer évvel ezelőtt tartottak népszámlálást. A Kijevi Ruszban 1245 óta van népszámlálás.

Európában a XVII. században külön tudomány alakult ki, a *Politikai számtan*, melyet John Graunt alapozott meg 1662-ben megjelent *Természeti és politikai megfigyelések a halálozási jegyzékek alapján* című könyvében. Eben a munkában találkozunk először az esemény gyakoriságának fogalmával, a szerző kimutatta, hogy fiú gyakrabban születik, mint lány (14 : 13 arányában). A könyv szerzője feljegyezte, hogy Londonban minden 100 újszülöttből

64 – 6 évet	16 – 36 évet	3 – 66 évet
40 – 16 évet	10 – 46 évet	1 – 76 évet
25 – 26 évet	6 – 56 évet	0 – 86 évet él.

Idővel a matematikai statisztika fejlődéséhez William Petty, Abraham de Moivre, Leonhard Euler, Johann Bernoulli, Pierre-Simon de Laplace, Simeon Denis Poisson és mások járultak hozzá. Az Orosz Birodalomban a XIX. században a matematikai statisztika problémáival az ukrán Mihajlo Vasziljovics Osztrohradszkij és Viktor Jakovics Bunyakovszkij foglalkozott. Többek között Mihajlo Osztrohradszkij dolgozta ki a termékek leselejtezésének módszerét, összeállította a test súrlódásos környezetbeli mozgáspályájának kiszámítását megkönnyítő táblázatot. Bunyakovszkij foglalkozott halandósági táblázatok és empirikus formulák felállításával, katonai behívások kontingensének meghatározásával, a bírósági eljárások tanúvallomásai valóságtartalmának meghatározásával, a megfigyelések hibáinak vizsgálatával.

Egy mai állam már nem tud létezni statisztika nélkül. Ukrajnában működik statisztikai hivatal, ahol közel ezer szakember gyűjti, elemzi és alkalmazza a különböző statisztikai adatokat.

A véletlen események néhány tulajdonságát az olasz Luca del Pacioli (1445–1514) és Gerolamo Cardano (1501–1576) fedezett fel, a szerencsejátékok vizsgálata közben. A valószínűség-számítást, mint a matematikai tudomány egyik ágát a francia Blaise Pascal (1623–1662) és Pierre de Fermat (1601–1665) alapozta meg. Később Johann Bernoulli (1654–1705) járult hozzá jelentősen a fejlődéséhez. Amíg a valószínűség-számítás kizárólag csak a szerencsejátékokhoz kapcsolódott, lassan fejlődött. Később, a matematikai statisztika bevezetésével a matematikusok meggyőződtek arról, hogy ez a területe a matematikának perspektivikus, kimondottan a statisztikai problémák, a demográfiai kérdések vizsgálatánál, a fizika, biológia, szociológia és lövészet elméletében. A valószínűség-számítás elmélete második virágzásba kezdett.



BLAISE PASCAL

(1623–1662)

Híres francia matematikus, fizikus, vallásfilozófus. Első értekezését mértanból 16 évesen írta. Ebben a művében fogalmazta meg a projektív geometria alaptételét. Mint a valószínűség-számítás egyik alapítója, új módszereket dolgozott ki a kombinatorikában és a végtelen kis mennyiségek számításában. Mint filozófus, első helyre a tudományt sorolta, másodikra az embert, hármadikra a hitet.

„Nemcsak eszünkkel ismerjük meg az igazságot, hanem szívünkkel is."

B. Pascal

„Pascal – nagy tudású ember, óriási szívvel – egy azok közül, akiket az emberek prófétának hívnak."

Lev Tolsztoj



JAKOB BERNOULLI

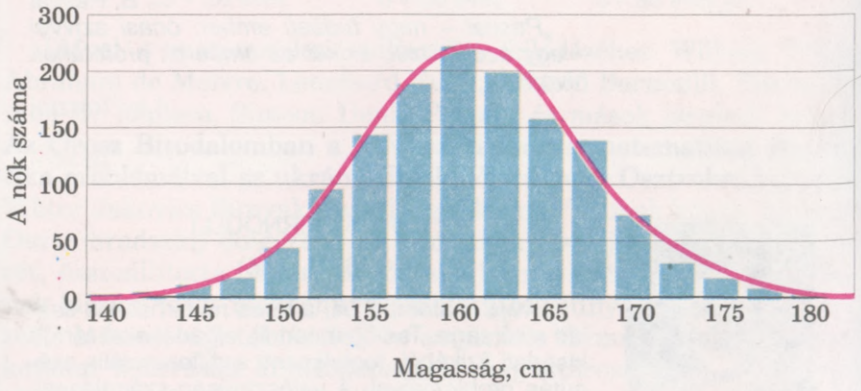
(1654–1705)

Svájci matematikus, a híres matematikus család első sarja. Teológiát tanult, előadásokat tartott kísérleti fizikából, foglalkozott a differenciális számítás problémáival, a valószínűség-számítással, megalapozta a variációs számítás alapjait, ami a különböző mennyiségek szélsőértékének meghatározására szolgál. Legfontosabb eredményeit a valószínűség-számításban érte el (Bernoulli-tétel,

Bernoulli-séma). Az $1^m + 2^m + \ldots + n^m$ összeg vizsgálata közben fedezte fel a matematika számára oly fontos Bernoulli-számokat. Továbbá foglalkozott számtannal, algebrával, mértannal, fizikával, csillagászattal. Bevezette az „integrál" fogalmát. Jacobon kívül a Bernoulli család tagjai között még 7 híres matematikus volt: Johann (I), Miklós (I), Miklós (II), Daniel, Johann (II), Johann (III), Jacob (II).

A statisztikai valószínűség szorosan összefügg a valószínűségszámítással is és a statisztikával is. Ebben a könyvben nincs lehetőségünk elmélyülni e tudományban. Megemlítjük az egyik fontos törvényszerűséget, melyet ez a tudomány tanulmányoz, a *normál eloszlást*. Még a XVIII. század elején elvégezték a következő kísérletet: megmérték 1375 nő magasságát, majd megszámolták, közülük hány 140 cm, 145 cm, 150 cm stb. magas. A kapott eredmények alapján hisztogramot (oszlopdiagramot) rajzoltak, és megállapították, hogy a függvény grafikonja egy kalapra hasonlít (111. ábra). Idővel megállapították, hogy ilyen eloszlású a gázmolekulák mozgása, az újszülöttek tömege és más mennyiségek a természetben. A normál eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



111. ábra

VIKTOR JAKOVICS BUNYAKOVSZKIJ

(1804–1889)



Ukrán matematikus (a Vinnicai terület Bar városában született). 168 tudományos munkát írt, melyek közül a legfontosabbak *A matematikai valószínűség elméletének alapjai*, *A tiszta és alkalmazott matematika lexikonja*, *Számtan*. Bunyakovszkij állami biztosítási és statisztikai szakértőként nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy a gazdasági életben a matematikai módszerek meghonosodjanak. Minden orosz egyetem tiszteletbeli tagja, a Tudományos Akadémia alelnöke.

MIHAJLO PILIPOVICS KRAVCSUK

(1892–1942)



Ukrán matematikus, akadémikus. A Volinyi terület Csovnyic falujában született. Algebrával, számelmélettel, függvényelmélettel, valószínűség-számítással, matematikai statisztikával, differenciál és integrál egyenletekkel foglalkozott. Aktívan kivette részét az ukrán matematikai szaknyelv kidolgozásában. Alaptalanul megvádolták, és száműzetésben halt meg Kolima faluban.

A statisztikai valószínűség, a normál eloszlás és a valószínűségszámítás más fogalmait sok elméleti és gyakorlati kutatásban alkalmazzák. És mindez a kockajátékkal kezdődött.

Az Ukrajnában született tudósok közül a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika területén legtermékenyebb matematikusok: V. J. Bunyakovszij (1804–1889), Sz. N. Bernstein (1880–1968), M. P. Kravcsuk (1892–1942), V. I. Hlivenko (1897–1940), V. J. Linnik (1915–1972), I. I. Gihman (1918–1985), M. J. Jadrenko (1932–2004) és sokan mások. is.

A 4. fejezet összefoglalása

Azokat a feladatokat, melyekben egy adott halmaz elemeiből kell meghatározni részhalmazainak és rendezett részhalmazainak a számát, *kombinatorikus feladatoknak* nevezzük.

Ha egy A halmazból n-féleképpen lehet kiválasztani egy elemet, a B halmazból pedig m-féleképpen, akkor az A vagy a B halmazból $n + m$-féleképpen lehet egy elemet kiválasztani. Ez az *összegszabály.*

Ha egy elempár első tagját m-féleképpen, második tagját n-féleképpen lehet kiválasztani, akkor mn ilyen elempár létezik. Ez a *szorzatszabály.*

Az első n természetes szám szorzatát n-faktoriálisnak nevezzük. Jelölése $n!$.

Egy n elemű halmaz k elemű rendezett részhalmazát n *elem* k-ad *osztályú variációjának* nevezzük. A variáció számát A_n^k jelöljük.

Bármely természetes n-re és k-ra $(n \geqslant k)$

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

n elem k-ad osztályú variációinak a száma egyenlő az első k természetes szám szorzatával.

n elem n-ed osztályú variációját n *elem permutációnak* nevezzük. Jelölése P_n.

n elem permutációinak száma $n!$: $P_n = n!$.

n elem k-ad osztályú kombinációja egy n elemű halmaz k elemű részhalmaza. n elem k-ad osztályú kombinációnak számát C_n^k-val jelöljük:

$$C_n^k = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

A statisztika tömegesen előforduló jelenségeket, folyamatokat, eseményeket jellemző adatok gyűjtésével, feldolgozásával, elemzésével foglalkozó tudomány.

A *minta módusza* a leggyakoribb elem.

A *minta mediánja* a megfelelő statisztikai sort két egyenlő részre osztó eleme.

A *minta átlaga* a minta elemeinek számtani közepe.

Elemi esemény a véletlen jelenségekre vonatkozó kísérlet lehetséges kimenetele. A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmazát *eseménytérnek* nevezzük, és a görög ábécé Ω (omega) betűjével jelöljük.

A véletlen A esemény valószínűségének nevezzük az A esemény számára kedvező elemi események n(A) számának és az összes

egyenlően lehetséges páronként független elemi események n számának, melyek az adott kísérletnél eseményteret alkotnak, arányát:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Ez a valószínűség klasszikus meghatározása.

A véletlen események valószínűségének legfontosabb tulajdonságai:

1) ha C lehetetlen esemény, akkor $P(C) = 0$;

2) ha B biztos esemény, akkor $P(B) = 1$;

3) ha X véletlen esemény, akkor $0 \leqslant P(X) \leqslant 1$;

4) ha $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ olyan események, melyek kimerítik egy kísérlet összes kimenetelét, tehát eseményteret alkotnak, akkor

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1$.

Ha n kísérletből az A esemény m-szer következik be, akkor az $\frac{m}{n}$ arány az *A esemény relatív gyakorisága*. Nagyon sok valós esetben a relatív gyakoriság az n szám növelésekor valamely p szám körül ingadozik (ha $n \to \infty$, akkor $\frac{m}{n} \to p$). Ezt a p számot az A *esemény valószínűségének* nevezzük. Ez a valószínűség statisztikai meghatározása.



Mértan

Egyenlő észbeli adottság mellett –
egyenlő feltételeknél –
az nyer, aki tudja a mértant.

Blaise Pascal

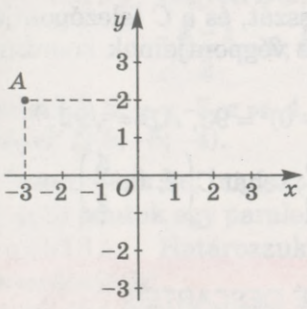
5 Koordináták és vektorok a térben

A FEJEZET TÉMAKÖREI

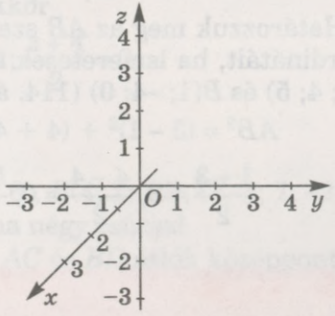
- Térbeli derékszögű koordináta-rendszer.
- Két pont távolsága és a szakasz felezőpontjának koordinátái.
- Vektorok a térben.
- Vektorműveletek és tulajdonságaik.
- Vektorok skaláris szorzata.
- Vektorok alkalmazása.
- A sík és a gömbfelület egyenlete.

24. §. Térbeli koordináták

Már tudjátok a síkmértanból, hogyha a síkon felveszünk egy derékszögű koordináta-rendszert, akkor a sík minden pontjához hozzárendelhetünk egy valós számpárt, a koordinátáit. Például az A ponthoz a –3 és 2 számot rendeljük (112. ábra); így írjuk $A(-3; 2)$.



112. ábra



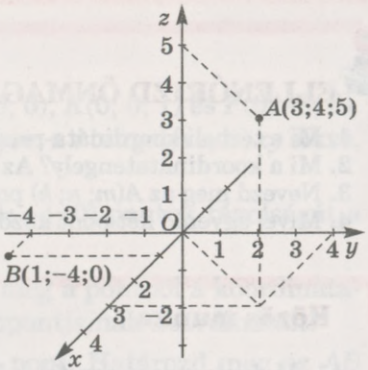
113. ábra

Hasonlóképpen a térben is meg lehet adni ilyen koordináta-rendszert.

Legyen x, y, z három, páronként egymásra merőleges számegyenes, melyek az O pontban, azaz az origóban metszik egymást (113. ábra). Ezeket az egyeneseket *koordinátatengelyeknek* nevezzük: x tengely, y tengely és z tengely (abszcissza, ordináta és aplikáta tengely).

Három ilyen kölcsönös helyzetű számegyenest *térbeli derékszögű koordináta-rendszernek* nevezzük.

Ha adott egy ilyen koordináta-rendszer, akkor a tér minden pontjához hozzárendelhető egyetlen rendezett valós számhármas, minden ilyen számhármashoz pedig a tér egyetlen pontja. Például az $A(3; 4; 5)$ pont jelöléséhez, az O ponttól 3 egységet kell lépni az x tengely mentén, 4-et az y tengellyel párhuzamosan, majd 5 egységet a z tengellyel párhuzamosan (114. ábra). Ahhoz viszont, hogy megjelöljük a $B(1; -4; 0)$ pontot 1 egységet kell lépni az x tengely mentén, 4-et párhuzamosan az y tengellyel, de ellenkező irányba, mivel –4 negatív szám.



114. ábra

Egy ilyen koordináta-rendszerrel a sztereometria sok feladata megoldható, hasonlóan a síkmértan koordinátákkal oldható feladataihoz. Többek között, könnyen bizonyíthatók az alábbi állítások:

Ha adott két $A(x_1; y_1; z_1)$ *és* $B(x_2; y_2; z_2)$ *pont, akkor*

a) *az AB szakasz felezőpontja a* $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ *pont;*

b) *az A és B pont közötti távolság négyzete*

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Határozzuk meg az AB szakasz hosszát, és a C felezőpontjának koordinátáit, ha ismeretesek a szakasz végpontjainak koordinátái: $A(3; 4; 5)$ és $B(1; -4; 0)$ (114. ábra)!

$$AB^2 = (3-1)^2 + (4+4)^2 + (5-0)^2 = 93, \quad AB = \sqrt{93};$$

$$\frac{1+3}{2} = 2, \quad \frac{4-4}{2} = 0, \quad \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}, \text{ tehát } C\left(2; 0; \frac{5}{2}\right).$$



RENÉ DESCARTES

(1596–1650)

Híres francia filozófus, matematikus, fiziológus, fizikus. Descartes vezette be a koordináták módszerét, a változó fogalmát, megalapozta a lineáris mértant, bevezette a most is használatos hatvány jelölést, a „+" és „–„ jeleket a pozitív és negatív számok jelölésére. Mint filozófus ismertebb, a kartezianizmus magalapítója. Nézetei miatt támadták a katolikusok és a protestánsok is. Többek között az *Értekezés a módszerről*, *A filozófia alapelvei*, *A lélek szenvedélyei* című könyvei tiltólistára kerültek.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a térbeli koordináta-rendszer?
2. Mi a koordinátatengely? Az origó?
3. Nevezd meg az $A(m; n; k)$ pont abszcisszáját, ordinátáját, aplikátáját!
4. Mivel egyenlő két pont közötti távolság négyzete?

Közös munka

1. Melyek a szakasz felezőpontjának koordinátái, ha végpontjainak koordinátái $A(4; 0; 2)$ és $B(6; 8; 6)$?

● **Megoldás.**
Határozzuk meg az AB szakasz $C(c_1; c_2; c_3)$ felezőpontjának koordinátáit!

$$c_1 = \frac{4+6}{2} = 5; c_2 = \frac{0+8}{2} = 4; c_3 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Felelet: $C(5; 4; 4)$.

2. A C pont az AB szakasz felezőpontja. Határozzuk meg a B pont koordinátáit, ha $A(-1; 3; 4)$ és $C(2; -1; 0)$!

● **Megoldás.** Legyen $B(x; y; z)$. Akkor

$$\frac{x-1}{2} = 2; \frac{y+3}{2} = -1; \frac{z+4}{2} = 0.$$

Innen $x = 5$, $y = -5$, $z = -4$.
Felelet: $B(5; -5; -4)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $A(5; -1; 6)$, $B(4; 2; -2)$, $C(-3; 7; -2)$ és $D(-2; 4; 6)$ pontok egy paralelogramma négy csúcsa!

● **Megoldás.** Határozzuk meg az AC és BD átlók középpontjainak koordinátáit!
Az AC átló felezőpontja:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1; y_1 = \frac{-1+7}{2} = 3; z_1 = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Tehát az AC átló felezőpontja $O_1(1; 3; 2)$.
Hasonlóképpen a BD átló felezőpontja:

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = 1; y_2 = \frac{2+4}{2} = 3; z_2 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Tehát a BD átló felezőpontja $O_2(1; 3; 2)$.
Mivel a két átló felezőpontja egybeesik, tehát az átlók metszik egymást és metszéspontjukban felezik egymást. Ezért az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

Szóbeli feladatok

771. Adott négy pont: $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $K(0; 0; 1)$ és $P(0; -8; 0)$. Melyik pont illeszkedik az x tengelyre, a z tengelyre, az xy síkra, az yz síkra?

772. Határozd meg az $A(3; 4; 5)$ és $B(1; -4; 0)$ pontok távolságát a koordinátasíkoktól (114. ábra)!

773. Adott a $K(2; 3; 4)$ pont. Határozd meg a pontból a koordinátasíkokra bocsátott merőlegesek talppontjainak koordinátáit!

774. Adott az $A(1; 2; 3)$ és $B(3; -6; 7)$ pont. Határozd meg az AB szakasz felezőpontját!

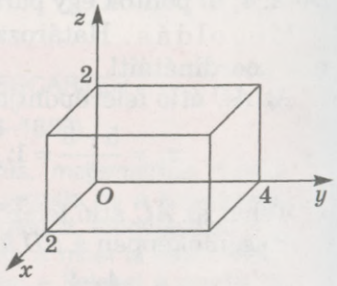
775. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak a térben, melyeknek: a) az első koordinátája; b) második koordinátája; c) harmadik koordinátája; d) az első két koordinátája; e) az első és a harmadik koordinátája; f) mind a három koordinátája nulla?

A

776. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi pontokat: $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 3)$, $C(0; 5; -4)$, $D(4; -3; 0)$, $E(2; 6; 4)$, $F(6; -2; -6)$!

777. Az $A(2; 0; 5)$, $B(-4; 0; 2)$, $C(4; 0; -2)$ és $D(1; 3; 1)$ pontok egy tetraédert határoznak meg. Melyik koordinátasíkban van az ABC alaplap?

778. Egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatestet úgy helyeztek egy koordináta-rendszerbe, ahogy azt a 115. ábra mutatja. Állapítsd meg: a) a csúcsok koordinátáit; b) az élek felezőpontjainak koordinátáit!



115. ábra

779. Határozd meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha:
a) $A(-1; 0; 6)$, $B(1; 2; 10)$;
b) $A(0; 4; -6)$, $B(2; 2; 2)$;
c) $A(-2; 4; 2)$, $B(-2; -4; 2)$!

780. Felezőpontja-e az origó a CD szakasznak, ha:
a) $C(-4; 0; 2)$, $D(4; 0; -2)$;
b) $C(-4; 2; -8)$, $D(4; -2; -8)$?

781. Melyik koordinátatengelyre illeszkedik az MN szakasz felezőpontja, ha:
a) $M(2; 4; -6)$, $N(-2; 7; 6)$; b) $M(-3; 0; 7)$, $N(-3; 0; -7)$?

782. Melyik koordinátasíkra illeszkedik a KP szakasz felezőpontja, ha:
a) $K(1; 1; 4)$, $P(4; 0; -4)$; b) $K(-6; 2; 4)$, $P(5; -2; 3)$?

783. Adott az $A(8; -5; -4)$ és $C(2; 1; 10)$ pontok. Határozd meg a B pont koordinátáit úgy, hogy a C pont az AB szakasz felezőpontja legyen!

784. Az M és N pont az ABC háromszög rendre az AB és BC oldalainak felezőpontjai. Határozd meg az A és C csúcs koordinátáit, ha $B(-2; 0; 4)$, $M(3; 9; -2)$, $N(-1; -4; 0)$!

B

785. Paralelogramma-e az $ABCD$ négyszög, ha:
a) $A(-1; -3; 18)$, $B(-2; 2; 12)$, $C(3; 3; -10)$, $D(4; -2; -4)$;
b) $A(4; -2; -6)$, $B(-6; 2; 8)$, $C(2; -3; 9)$, $D(12; -7; -4)$?

786. Határozd meg az $ABCD$ paralelogramma D csúcsának koordinátáit, ha:
a) $A(2; 4; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$;
b) $A(-7; 5; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$!

787. Az O pont az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja. Határozd meg a C és D csúcsok koordinátáit, ha $A(-1; 8; -2)$, $B(-4; 6; 5)$, $O(1; 0; 2)$!

788. Határozd meg a $B(-2; 6; 3)$ és $K(3; 4; -2)$ pontok távolságát!

789. Az $A(2; -1; -5)$ vagy a $B(-2; 1; 6)$ pont van közelebb az origóhoz?

790. Lehetnek-e az $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$ és $C(3; 4; 5)$ pontok egy háromszög csúcsai?

791. Adott az $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 3; 1)$ és $C(3; 1; -2)$ pont. Határozd meg az ABC háromszög kerületét!

792. Adva van az $M(0; 1; 1)$, $N(2; -1; 3)$ és $P(-1; k; 0)$ pont. A k mely értékénél teljesül az $MP = NP$ egyenlőség?

793. Határozd meg az y tengely azon pontját, amely azonos távolságra van az $A(4; -1; 3)$ és $B(1; 3; 0)$ ponttól!

794. Határozd meg az ABC háromszög BM súlyvonalát, ha $A(-2; 3; 6)$, $B(2; 3; -1)$ és $C(4; 1; 0)$!

795. AM az ABC háromszög súlyvonala. Határozd meg a BN súlyvonal hosszát, ha $A(2; -4; 2)$, $C(0; 0; 6)$, $M(1; 2; 4)$!

796. Állapítsd meg az $ABC\triangle$ fajtáját, határozd meg a kerületét és a területét, ha:
a) $A(5; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 5)$;
b) $A(-2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(-2; 4; 0)$;
c) $A(2; 4; -1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(5; 1; 2)$!

797. Állapítsd meg az $MNPK$ négyszög fajtáját, és számítsd ki a területét, ha:
a) $M(0; -2; 0)$, $N(4; 1; 0)$, $P(4; 1; 5)$, $K(0; -2; 5)$;
b) $M(6; 8; 2)$, $N(2; 4; 3)$, $P(4; 2; 8)$, $K(8; 6; 7)$!

Ismétlő feladatok

798. Adva van az: $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-4; 6)$, $\overrightarrow{MN} = (3; -2)$ vektor. Határozd meg az alábbi vektorok koordinátáit: a) $\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NM}$!

799. Adott három pont: $M(1; 3)$, $N(7; 5)$, $K(5; -1)$. Határozd meg az $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$ és $\overrightarrow{MK}$ vektorok koordinátáit és hosszukat! Határozd meg az $MNK\Delta$ fajtáját!

800. Határozd meg a 9, 15 és 21 cm oldalhosszúságú háromszög legnagyobb szögét!

25. §. Térbeli vektorok

Szinte minden, amit a síkbeli vektorokról tanultatok, kiterjeszthető a térbeli vektorokra is. A vektort ebben az esetben is irányított szakasszal ábrázoljuk, és így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$. Ugyanúgy definiáljuk a vektor hosszának fogalmát, a nullvektort, a kollineáris vektorokat, a vektorok összegét, különbségét, számmal, skalárral való szorzását. A térbeli vektorokat is a háromszögszabály és paralelogramma-szabály szerint lehet összeadni. Mindig teljesül

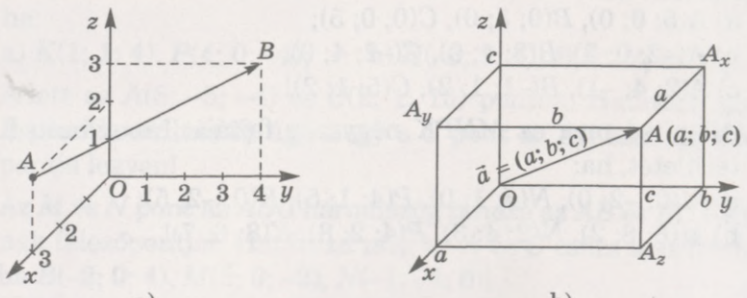
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Viszont, amíg a síkon a vektort két koordinátája határozza meg, addig a térben három.

Az $A(x_1; y_1; z_1)$ kezdőpontú és $B(x_2; y_2; z_2)$ végpontú ***$\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáinak*** *nevezzük az $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ és $z = z_2 - z_1$ számokat.*

Így jelöljük: $\overrightarrow{AB} = (x; y; z)$ vagy $\vec{a} = (x; y; z)$.

Például, ha $A(3; 0; 2)$ és $B(0; 4; 3)$ pont az $\overrightarrow{AB}$ vektor kezdő és végpontja (116. *a* ábra), akkor $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$. Tehát az $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; 1)$. A -3, 4 és 1 számok az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái.



a) b)

116. ábra

Ha az O pont az origó, az a, b és c számok az A pont koordinátái, akkor az $\overrightarrow{OA}$ vektor koordinátái ugyanezek a számok (116. *b* ábra).

Az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ *vektor összegének* az alábbi vektort nevezzük

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

Ennek a két vektornak *a különbsége*

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

Bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

A tér bármely tetszőleges A, B, C és D pontjára teljesül, hogy

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

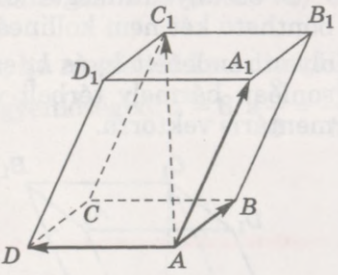
Többek között, ha $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egy paralelepipedon (117. ábra), akkor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$ (paralelepipedon-szabály). De ekkor $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$. Ezért

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}.$$

Az $\vec{a}$ vektor *hosszát* (abszolút értékét) $|\vec{a}|$-val jelöljük. Minden esetben, ha $\vec{a} = (x; y; z)$, akkor

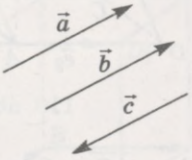
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bármely vektor hossza pozitív szám, kivéve a nullvektorét. Csak a nullvektor hossza 0: $\vec{0} = (0; 0; 0)$, $|\vec{0}| = 0$.



117. ábra

Két vektor egyenlő, ha irányuk és hosszuk egyenlő. Ha két vektor hossza egyenlő, de ellenkező irányú, akkor az ilyen vektorokat ellentett vektoroknak nevezzük. Például az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyenlők (118. ábra), az $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok pedig ellentettek. Két vektor akkor és csakis akkor egyenlő, ha megfelelő koordinátáik azonosak.



118. ábra

Két nem nullvektor *kollineáris*, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak. A nullvektor bármely vektorral kollineáris.

Ahhoz, hogy egy vektort megszorozzunk egy számmal, skalárral, a vektor minden koordinátáját meg kell szorozni ezzel a számmal: ha $\vec{a} = (x; y; z)$, akkor $m\vec{a} = (mx; my; mz)$.

Bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra, valamint m és n valós számra igaz, hogy

$$m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a}+m\vec{b};\ (m+n)\vec{a} = m\vec{a}+n\vec{a};\ |m\vec{a}| = |m|\cdot|\vec{a}|.$$

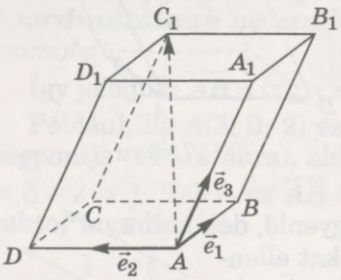
Ezek a tulajdonságok a vektor számmal való szorzási szabályából következnek.

Ha egy vektort számmal szorzunk, akkor az adott vektorral kollineáris vektort kapunk, vagyis ha $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, akkor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak. És fordítva, ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak és a hosszuk arányát λ-val jelöljük, akkor $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, ha a vektorok egyirányúak és $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$, ha a vektorok ellentétes irányúak. Így megfogalmazhatjuk azokat az **ismérveket, mikor kollineáris két vektor**: két, $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektor, akkor és csak akkor kollineáris, ha $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Be lehet bizonyítani, hogy az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektorok akkor és csak akkor kollineárisak, ha megfelelő koordinátáik arányosak, vagyis $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Három nullától különböző vektor *komplementáris*, ha a vektorokat jelölő irányított szakaszok egy síkhoz vagy párhuzamos síkokhoz tartoznak.

9. osztályban megtanultátok, hogy a sík bármely $\vec{c}$ vektora felbontható két nem kollineáris $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra, azaz létezik egyetlen olyan rendezett k_1 és k_2 számpár, melyre $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$. Ehhez hasonlóan bármely térbeli vektor felbontható három nem komplementáris vektorra.



119. ábra

Legyen $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ és $\vec{e}_3$ három nem komplementáris vektor (119. ábra). Ha ezt a három egységvektort és egy tetszőleges AC_1 vektort egy A ponttól felmérjük, akkor a három egységvektorra és az AC_1 irányított szakaszra paralelepipedon szerkeszthető, melynek AC_1 az átlója. Minden esetben egyértelműen meghatározható k_1, k_2 és k_3 valós számhármas úgy, hogy $\vec{e}_1k_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2k_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3k_3 = \overrightarrow{AA_1}$. Ekkor $\overrightarrow{AC_1} = \vec{e}_1k_1 + \vec{e}_2k_2 + \vec{e}_3k_3$.

Azt mondjuk, hogy az $\overrightarrow{AC_1}$ vektort *felbontották három nem komplementáris vektorra*.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Hogyan ábrázoljuk a vektorokat?
2. Mik a vektor koordinátái?

3. Mi a nullvektor? Hogyan jelöljük?
4. Milyen műveleteket végezhetünk térbeli vektorokkal?
5. Mi két vektor összege?
6. Hogyan határozzuk meg két vektor összegét a háromszög-, a paralelogramma-, a paralelepipedon szabály szerint?
7. Mivel egyenlő az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektorok különbsége?
8. Mi a vektor hossza, abszolút értéke?
9. Mely vektorok kollineárisak? Komplementárisak?

Közös munka

1. Határozzuk meg a $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ vektor koordinátáit, ha

$$\vec{a} = (2; -1; 5), \vec{b} = (-3; 0; -2)!$$

● Megoldás. Meghatározzuk a $2\vec{a}$ és $5\vec{b}$ vektorok koordinátáit:

$$2\vec{a} = (4; -2; 10), 5\vec{b} = (-15; 0; -10).$$

Ezért $\vec{c} = (4 - 15; -2 + 0; 10 - 10) = (-11; -2; 0)$.

A vektor hossza $|\vec{c}| = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Felelet: $|\vec{c}| = 5\sqrt{5}$.

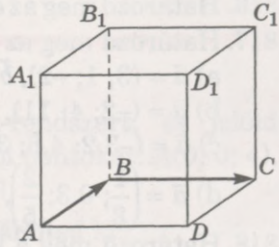
2. Az a és b mely értékénél kollineáris az $\vec{m} = (2; a; -5)$ és $\vec{n} = (3; 9; b)$ vektor?

● Megoldás. Két vektor kollineáris, ha megfelelő koordinátáik arányosak, vagyis $\frac{2}{3} = \frac{a}{9} = \frac{-5}{b}$. A $\frac{2}{3} = \frac{a}{9}$ egyenlőségből $a = 6$, a $\frac{2}{3} = \frac{-5}{b}$ egyenlőségből pedig $b = -7{,}5$.

Felelet: $a = 6$, $b = -7{,}5$.

Szóbeli feladatok

801. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon kocka (120. ábra). Nevezd meg:
a) a BC vektorral egyenlő vektort;
b) az AB vektor ellentett vektorát;
c) az AB vektorral kollineáris vektort;
d) az AA_1 vektorral komplementáris vektort!



120. ábra

802. Határozd meg az alábbi vektorok összegét és különbségét:
a) $\vec{a} = (-3; 0; 6)$, $\vec{b} = (2; -2; 4)$;
b) $\vec{c} = (7; -1; 2)$, $\vec{d} = (-2; 6; 4)$!

803. Adott az $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$ vektor. Határozd meg a $\overrightarrow{BA}$ vektor koordinátáit!

804. Határozd meg az $\vec{a} = (-3; 0; 4)$ vektor hosszát!

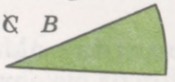
805. Szorozd meg az $\vec{m} = (-8; 4; 0)$ vektort a következő számokkal: $2; -3; 0{,}5; -\frac{1}{4}$!

806. Kollineárisak-e az alábbi vektorok:
a) $\vec{a} = (1; 1; 2)$, $\vec{b} = (2; 2; 4)$;
b) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$;
c) $\vec{a} = (2; 4; 7)$, $\vec{b} = (1; 2; 3{,}5)$?

807. Határozd meg az alábbi vektorok összegét: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PK}$!

808. Határozd meg az alábbi vektorok különbségét: $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PT}$; $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$!

809. Fejtsd meg a képrejtvényt (121. ábra):



121. ábra

A

810. A B pont az AC szakasz felezőpontja, a C pont pedig a BD szakasz felezőpontja. Egyenlők-e az alábbi vektorok:
a) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DB}$; b) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$?

811. Adott két, $A(1; 2; 3)$ és $B(3; 7; 6)$ pont. Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BA}$ vektorok koordinátáit!

812. Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit, ha:
a) $A(1; 2; 5)$ és $B(-3; 2; 4)$;
b) $A(-3; 2; 0)$ és $B(-1; 5; 2)$!

813. Határozd meg az $\overrightarrow{MN}$ vektor hosszát, ha $M(3; 2; -1)$ és $N(1; -2; -1)$!

814. Határozd meg a következő vektorok abszolút értékét:
a) $\vec{a} = (2; 3; -1)$; b) $\vec{c} = (1; 2; 6)$!

815. Az $\vec{a} = (2; 1; 3)$ és $\vec{b} = (-1; x; 2)$ vektorok abszolút értéke egyenlő. Határozd meg az x értékét!

816. Határozd meg az $\vec{a} = (a; 2a; -a)$ vektor koordinátáit, ha $|\vec{a}| = \sqrt{54}$!

817. Határozd meg az alábbi vektorok összegét és különbségét:
a) $\vec{a} = (3; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; -2; 5)$;
b) $\vec{a} = (-2; 4; 11)$, $\vec{b} = (2; 6; 21)$;
c) $\vec{a} = (-3{,}2; 4{,}6; 3)$, $\vec{b} = (-0{,}2; 2; 3{,}5)$;
d) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}; 0{,}3; \frac{2}{5}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$!

818. Határozd meg a következő vektorok összegét és az összegvektor abszolút értékét:
$\vec{x} = \left(0; 3; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y} = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $\vec{z} = \left(-1; \frac{1}{2}; 2\right)$!

819. Határozd meg az alábbi vektorok összegét:
a) $\overrightarrow{CX}$ és $\overrightarrow{XP}$; b) $\overrightarrow{BT}$ és $\overrightarrow{AB}$;

c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{DE}$; d) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{MC}$ és $\overrightarrow{CK}$!

820. Adva van az $\vec{a} = (3; -4; 2)$ vektor. Határozd meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a) $3\vec{a}$; b) $\frac{3}{4}\vec{a}$; c) $-0{,}5\vec{a}$!

B

821. Adott a $\vec{p} = (-1; 3; 7)$ és $\vec{q} = (6; 2; -8)$ vektor. Határozd meg a következő vektorok koordinátáit:

a) $2\vec{p} + 3\vec{q}$; b) $\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}$; c) $2\vec{q} - 3\vec{p}$!

822. Határozd meg a $3\vec{a} - \vec{b}$ és $2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorok abszolút értékét, ha $\vec{a} = (2; 0; -3)$ és $\vec{b} = (5; -1; 2)$!

823. Kollineárisak-e az $\vec{a} - 2\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok, ha:
$\vec{a} = (2; -2; 4)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (-8; 16; 0)$?

824. Az m mely értékeinél kollineáris az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor, ha:
a) $\vec{a} = (1; m; -3)$, $\vec{b} = (-2; 10; 6)$;
b) $\vec{a} = (m; -2; 4)$, $\vec{b} = (-3; 6; m)$?

825. Adott négy pont: $A(-1; 4; 6)$, $B(2; -3; 1)$, $C(-1; 0; 2)$, $D(-2; 6; 1)$. Határozd meg az alábbi vektorok koordinátáit: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$!

826. Egy egyenesre illeszkednek-e az A, B és C pontok, ha $\overrightarrow{OA} = (-1; 2; -6)$, $\overrightarrow{OB} = (2; -4; 3)$, $\overrightarrow{OC} = (2; -4; 6)$?

827. Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, melyben $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Fejezd ki az $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$ és $\overrightarrow{A_1C}$ vektorokat az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokkal!

Ismétlő feladatok

828. Rajzolj térbeli derékszögű koordináta-rendszert, és jelöld ebben a koordináta-rendszerben az alábbi pontokat: $A(0; 0; 4)$, $B(0; 5; 0)$, $C(3; 0; 0)$, $D(3; 4; 0)$, $E(3; 4; 2)$!

829. Az előző feladat feltételeit alkalmazva számítsd ki:
a) az AB szakasz hosszát;
b) a CD szakasz felezőpontjának koordinátáit;
c) a $\overrightarrow{DE}$ vektor koordinátáit!

830. Határozd meg az $\vec{a} = (1; -3)$ és $\vec{b} = (2; 5)$ vektorok skaláris szorzatát!

26. §. Térbeli vektorok alkalmazása

A koordináta geometria és a vektorok jó eszköz, mellyel a fizika, a csillagászat, a geodézia és más gyakorlati tudomány fontos és érdekes feladatait meg lehet oldani. A matematikának azt a részét, amely a koordináta geometriával és a vektorokkal megoldható feladatokkal foglalkozik, *analitikus mértannak* nevezzük. Ezt a tárgyat az egyetemek, főiskolák, műszaki oktatási intézmények matematika szakjain oktatják.

Ha egy feladatot vektorral oldunk meg, először a feladatot kell értelmezni a vektorok nyelvén, figyelembe véve az alábbi tulajdonságokat:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, ez azt jelenti, hogy az A és B pont egybeesik;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ – az AB és a CD egyenesek párhuzamosak;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ – az A, B és a C pontok egy egyenesre illeszkednek;

$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$ – az O, A, B, és C pontok egy síkra illeszkednek;

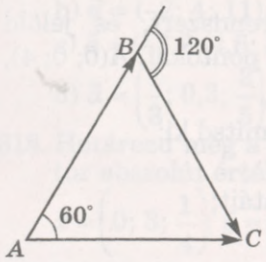
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ – az AB és CD egyenesek merőlegesek;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ – az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge φ.

A kapott vektoregyenlőségeket a vektorműveletek szabályai szerint átalakítjuk, majd újból átfogalmazzuk a hagyományos geometria nyelvén.

Az utolsó két egyenlőséget síkmértanból tanultátok már, a síkbeli vektorok témakörön belül. Vezessük be a térbeli vektorok skaláris szorzatának fogalmát! Ahhoz, hogy ezt a fogalmat definiáljuk, először tisztázzuk, mit értünk két nem nullvektor hajlásszögén.

Két nem nullvektor hajlásszögének nevezzük a vektorokkal egyirányú, közös kezdőpontú irányított szakaszok hajlásszögét. Két ellentétes irányú vektor hajlásszöge 180°, két egyirányú vektor hajlásszöge pedig 0°. Például ha az ABC háromszög egyenlő oldalú, akkor az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok közötti szög 60°, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok hajlásszöge pedig 120° (122. ábra).



122. ábra

Két nem nullvektor ***skaláris szorzata*** *a vektorok hosszainak és hajlásszögük koszinuszának szorzatával egyenlő.*

Ha két vektor közül legalább az egyik 0 vektor, akkor a skaláris szorzatuk is nulla.

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hajlásszöge φ, akkor ezen vektorok skaláris szorzata

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bebizonyítható a következő tulajdonság. **Az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektorok skaláris szorzata az $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ összeggel egyenlő.**

Ebből a tulajdonságból következik, hogy bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra teljesül $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ és $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Figyelembe véve az előbbi vektor egyenlőségeket, a vektorok összeadásának és számmal való szorzásának tulajdonságait, megállapíthatjuk, hogy a vektort tartalmazó kifejezéseket majdnem ugyanúgy lehet átalakítani, mint a többtagú kifejezéseket. A skaláris szorzatok meghatározása egyszerű feladat. Ha ismerjük a vektorok skaláris szorzatát és abszolút értéküket, akkor a vektorok hajlásszögének koszinuszát is könnyen meghatározhatjuk.

Feladat. Határozzuk meg az $\vec{a} = (1; 2; 2)$ és $\vec{c} = (2; 3; 6)$ vektor hajlásszögének koszinuszát!

● **Megoldás.** A definíció szerint $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$. Ezért

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{21}.$$

Felelet: $\cos\varphi = \frac{20}{21}$.

Ha két nem nullvektor hajlásszöge 90°, akkor skaláris szorzatuk 0, mivel $\cos 90° = 0$ és fordítva, ha két nem nullvektor skaláris szorzata 0, akkor a hajlásszögük koszinusza 0. Ez azt jelenti, hogy a vektorok 90°-os szöget zárnak be, tehát merőlegesek. Így megkaptuk a *vektorok merőlegességének feltételét*: két nem nullvektor, akkor és csak akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk nulla.

Az $\vec{a}$ és $\vec{a}$ vektor skaláris szorzatának jelölése $\vec{a}^2$ és az $\vec{a}$ vektor skaláris négyzetének nevezzük. A skaláris szorzat definíciója szerint

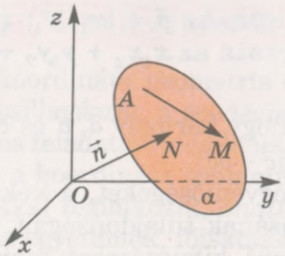
$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = \vec{a}^2$, innen következik, hogy $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Tehát nemcsak azokat a feladatokat lehet vektorral megoldani, melyek feltételében szerepel vektor, hanem sokkal szélesebb azon feladatok köre, melyek vektorral megoldhatók.

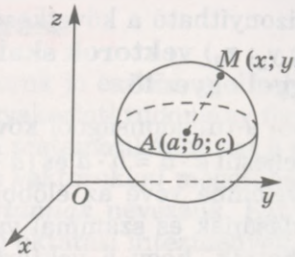
Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $\vec{n} = (a; b; c)$ vektorra merőleges sík egyenlete $ax + by + cz + d = 0$ alakú.

● **Megoldás.** Legyen az α sík az $\vec{n} = (a; b; c)$ vektorra merőleges sík, az $A(x_0; y_0; z_0)$ pont az α síkra illeszkedő pont és $M(x; y; z)$ az α sík tetszőleges pontja (123. ábra). Az $\vec{n} = (a; b; c)$ és az $\overrightarrow{AM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ vektorok kölcsönösen merőlegesek. Ezért ezeknek a vektoroknak a skaláris szorzata 0:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



123. ábra



124. ábra

Ez a keresett α sík egyenlete. Ha felbontjuk a zárójeleket és az $ax_0 + by_0 + cz_0$ számot d-vel helyettesítjük, megkapjuk az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletet.

Az r sugarú és $A(a; b; c)$ középpontú gömbfelület azon pontok halmaza, melyek r távolságra vannak az A ponttól (124. ábra). Ezért a gömbfelület tetszőleges $M(x; y; z)$ pontjára teljesül az alábbi egyenlőség:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Ez az r sugarú $A(a; b; c)$ középpontú gömbfelület egyenlete. Ha $a = b = c = 0$, akkor egy r sugarú origó középpontú gömbfelület egyenletét kapjuk.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

A vektor fogalmat William Rowan Hamilton vezette be.



WILLIAM ROWAN HAMILTON

(1805–1865)

Ír matematikus. 3 évesen tanult meg olvasni, 10 évesen egyetemi hallgató lett, 12 évesen 10 nyelven beszélt. 22 évesen csillagászprofesszor és az obszervatórium igazgatója. Főbb munkáiban a mechanikával, differenciális egyenletekkel és funkcionális analízissel foglalkozott. Vizsgálta a számhalmazokat, megalkotta a kvaterniók elméletét, bevezette a „vektor" szakkifejezést. Mértanból a hullámfelületekkel foglalkozott, algebrából a csoport algebrával, az egyik ilyen csoportot róla nevezték el Hamilton-féle csoportnak.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Hogyan oldunk meg feladatot vektorokkal?
2. Milyen vektor képleteket ismersz?

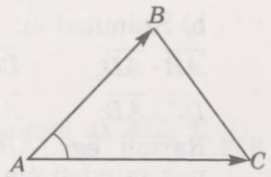
3. Definiáld két vektor skaláris szorzatát!
4. Mivel egyenlő az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektor skaláris szorzata?
5. Fogalmazd meg két vektor merőlegességének feltételét!
6. Hogyan kell meghatározni az $\vec{a}$ vektor hosszát!

Közös munka

1. Határozzuk meg az ABC háromszög A szögének koszinuszát, ha $A(3; -1; 5)$, $B(-1; -1; 2)$, $C(3; 1; 3)$!

● **Megoldás.** Vezessük be az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorokat (125. ábra), és határozzuk meg a koordinátáikat:

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 0; -3),\ \overrightarrow{AC} = (0; 2; -2).$$



125. ábra

A skaláris szorzat definíciója alapján

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos A\angle.$$

Ezért $\cos A\angle = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Mivel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 0 + 6 = 6$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2}$, így

$$\cos A\angle = \frac{6}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Felelet: $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

2. Az m mely értékénél merőleges az $\vec{a} = (4; 2m; 5)$ és $\vec{b} = (m; 3; 4)$ vektor?

● **Megoldás.** Két vektor merőleges, ha skaláris szorzatuk nulla.

Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 6m + 20 = 10m + 20$, így $10m + 20 = 0$, innen $m = -2$.

Felelet: $m = -2$.

3. Írd fel az $A(1; -3; 5)$ pontra illeszkedő $2x - 3y + z + 10 = 0$ síkkal párhuzamos sík egyenletét!

● **Megoldás.** Az adott sík merőleges az $\vec{n} = (2; -3; 1)$ vektorra. Ezért a vele párhuzamos sík, melynek az egyenletét kell felírnunk, szintén merőleges erre a vektorra, vagyis az egyenlete $2x - 3y + z + d = 0$ alakú. Már csak egy maradt, hogy meghatá-

rozzuk a d értékét. Mivel az $A(1; -3; 5)$ pont illeszkedik a síkra, így $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) + 5 + d = 0$, innen $d = -16$.
Felelet: $2x - 3y + z - 16 = 0$.

Szóbeli feladatok

831. Adva van egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (126. ábra).

a) Határozd meg az alábbi vektorok hajlásszögét:

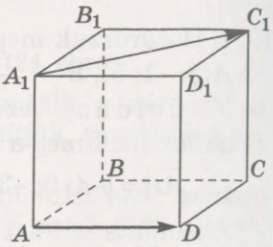
$\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$;

$\overrightarrow{A_1C_1}$ és $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{A_1B_1}$!

b) Számítsd ki:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DD_1}$;

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{D_1D}$!



126. ábra

832. Rajzolj egy $ABCD$ tetraédert, melynek minden éle a hosszúságú. Számítsd ki az alábbi skaláris szorzatokat:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$!

833. Nevezd meg az $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$ gömbfelület középpontjának koordinátáit és a sugarát!

834. Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

a) $\vec{a} = (0; -5; 6)$ és $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

b) $\vec{a} = (1; 1; 1)$ és $\vec{b} = (-2; 3; 2)$!

A

835. Az $ABC\Delta$-ben az $A\angle = 50°$, a $C\angle = 90°$. Határozd meg az alábbi vektorok hajlásszögét:

a) $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$!

836. Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha hosszuk és hajlásszögük:

a) 5; 12; 60°; b) 3; $\sqrt{2}$; 45°;

c) 5; 6; 120°; d) 4; 7; 180°!

837. Az ABC háromszög egyenlő oldalú. $AB = 6$. Határozd meg az alábbi vektorok skaláris szorzatát: a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$!

838. Számítsd ki a következő vektorok skaláris szorzatát:

a) $\vec{a} = (1; 2; -3)$ és $\vec{b} = (-8; 2; 4)$;

b) $\vec{m} = (-2; -3; 2)$ és $\vec{n} = (2; 3; 0{,}5)$;

c) $\vec{p} = (-3; -7; 1)$ és $\vec{k} = (-2; 10; -6)$;

d) $\vec{c} = (4\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{5})$ és $\vec{d} = (2; 3; -10)$!

839. Adva van a $\vec{p} = (-1; 3; 2)$ és $\vec{q} = (-3; -1; 2)$ vektor. Határozd meg az alábbi vektorok skaláris szorzatát:
a) $\vec{p} + \vec{q}$ és $\vec{p} - \vec{q}$; b) $\vec{p} + 2\vec{q}$ és $3\vec{p} - \vec{q}$; c) $2\vec{p} + \vec{q}$ és $3\vec{p} - 2\vec{q}$!

840. Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög koszinuszát:
a) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$;
b) $\vec{a} = (2; 6; 4)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$;
c) $\vec{a} = (-4; -8; 1)$, $\vec{b} = (-3; 3; 0)$;
d) $\vec{a} = (-3; -4; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$!

841. Határozd meg az alábbi vektorok hajlásszögét:
a) $\vec{a} = (-2; 0; 2)$ és $\vec{b} = (0; 0; 4)$;
b) $\vec{x} = (1; 1; 0)$ és $\vec{y} = (0; -1; 1)$;
c) $\vec{c} = (0; 0; 2)$ és $\vec{d} = (1; 0; -1)$;
d) $\vec{p} = (0; 2; 2)$ és $\vec{k} = (3; 0; 3)$!

842. Igazold, hogy az a háromszög, melynek csúcsai az $A(2; 1; 3)$, $B(7; 4; 5)$, $C(4; 2; 1)$ pontok, derékszögű!

843. Az x mely értékénél merőleges az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektor, ha:
a) $\vec{m} = (1; 2; 3)$, $\vec{n} = (x; 3; 1)$;
b) $\vec{m} = (-3; x; 2)$, $\vec{n} = (9; x; 1)$;
c) $\vec{m} = (x + 2; x; 3)$, $\vec{n} = (1; 3; -2)$;
d) $\vec{m} = (x - 3; x; 1)$, $\vec{n} = (4; x; -3x)$?

B

844. Adva van három pont: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Határozd meg a z tengely azon D pontját, melyre teljesül, hogy $AD \perp BC$!

845. Adva van két pont: $A(1; 4; 8)$ és $B(-4; 0; 3)$. Mekkora szögben látszik az origóból az AB szakasz?

846. Számítsd ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszögét, ha:
a) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; b) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$!

847. Állapítsd meg az $ABCD$ négyszög fajtáját, ha:
a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{BC} = 0{,}5\overrightarrow{AD}$!

848. Határozd meg az ABC háromszög fajtáját, ha $\overrightarrow{CA} = (1; 4; 2)$, $\overrightarrow{CB} = (-4; 1; 0)$!

849. Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az $x + y + z + 3 = 0$ síkra: $A(0; 0; 1)$, $B(-1; 1; -3)$, $C(2; 0; -5)$, $D(0; -3; 3)$?

850. A $2x - 4y + 6z - 2 = 0$, $2x + 4y + 6z + 3 = 0$ és a $-4x + 8y - 12z = 0$ síkok közül melyik párhuzamos az $x - 2y + 3z - 5 = 0$ síkkal?

851. Adott az $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 9$ gömbfelület. Mekkora távolságra van a gömbfelülettől az a sík, amely: a) metszi a gömbfelületet; b) érinti a gömbfelületet; c) nincs a gömbfelülettel közös pontja?

852. Írd fel az $A(2; -1; 4)$ pontra illeszkedő az $\vec{n} = (5; 0; -3)$ vektorra merőleges sík egyenletét!

853. Adva van az $A(a; b; c)$ pont. Írd fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az origóra, az O pontra, és merőleges az OA egyenesre!

854. Adva van az $A(1; 2; -3)$ és $B(4; -2; 4)$ pont. Írd fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az AB szakaszra, és illeszkedik: a) az A pontra; b) a B pontra; c) az AB szakasz felezőpontjára!

855. Írd fel az $r = 4$ sugarú és $M(1; -3; 5)$ középpontú gömbfelület egyenletét!

856. Írd fel az $M(-1; 0; 2)$ középpontú gömbfelület egyenletét, ha tudjuk, hogy a gömbfelületre illeszkedik az $A(3; 1; 1)$ pont!

857. Írd le annak a gömbnek az egyenletét, melynek átmérője az AB szakasz, ha $A(2; -3; 5)$ és $B(4; 1; -3)$!

Ismétlő feladatok

858. Egy vektor hossza 10, koordinátái egyenlők. Határozd meg a vektor koordinátáit!

859. Az $A(2; -5; 4)$ ponttól felmérték az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektort. Határozd meg a B pont koordinátáit, ha $\vec{a} = (1; 3; -2)$!

860. Add meg annak a körvonalnak az egyenletét, melynek a sugara 5, középpontja pedig:
a) az origó; b) az $O(1; -2; 3)$ pont!

6. számú önálló munka

1. változat

1. Adva van az $M(2; -1; 3)$ és $N(2; 5; 11)$ pont. Határozd meg: a) az MN szakasz hosszát; b) az MN szakasz felezőpontjának koordinátáit; c) az $\overrightarrow{MN}$ vektor koordinátáit!

2. Adva van az $\vec{a} = (3; 0; 7)$ és $\vec{b} = (1; 2; 0)$ vektor. Határozd meg az alábbi vektorokat:
a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $2\vec{a}$; c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$!

3. Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $A(2; 0; -1)$, $B(1; 3; 0)$ és $C(0; -1; 2)$!

2. változat

1. Adva van az $M(3; -5; 3)$ és $N(3; 1; 11)$ pont. Határozd meg: a) az MN szakasz hosszát; b) az MN szakasz felezőpontjának koordinátáit; c) az $\overrightarrow{MN}$ vektor koordinátáit!

2. Adott az $\vec{a} = (0; 4; 5)$ és $\vec{b} = (3; 2; 0)$ vektor. Határozd meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $3\vec{a}$; c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$!

3. Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $A(1; 0; 3)$, $B(0; -1; 2)$ és $C(3; 4; 0)$!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Mi a térbeli derékszögű koordináta-rendszer?
2. Mi a pont koordinátái a térben?
3. Hogyan kell feltüntetni egy adott pontot egy adott koordináta-rendszerben?
4. Milyenek az x tengely (y tengely, z tengely) pontjainak koordinátái?
5. Írd le a szakasz felezőpontjának képletét!
6. Milyen képlettel lehet meghatározni két pont távolságát?
7. Hogyan kell meghatározni egy vektor koordinátáit, ha ismerjük kezdő és végpontjának koordinátáit?
8. Írd le azt a képletet, amellyel kiszámítható két vektor: a) összeg vektorának; b) különbség vektorának koordinátái?
9. Milyen képlettel lehet meghatározni két vektor skaláris szorzatát?
10. Fogalmazd meg két vektor merőlegességének feltételét!
11. Add meg az r sugarú, $B(a; b; c)$ középpontú gömbfelület egyenletét!

Matematikatörténeti adalékok

A síkbeli **koordináták módszerét** René Descartes és Pierre de Fermat dolgozta ki a XVII. században. Csak a XVIII. században bővítette ki Johann Bernoulli, Alexo (Claude de) Clairant és mások háromdimenziós térre.

A vektor fogalmát 1846-ban vezette be William Rowan Hamilton ír matematikus. A vektor $\vec{r}$ alakú jelölését Augustin Cauchy ajánlotta 1847-ben. Az első vektorműveletekről szóló művet V. P. Jermakov, a kijevi egyetem professzora 1873-ban adta ki *Síkbeli vektorok elmélete* címen.

Eleinte a vektorokat főleg a fizikában alkalmazták az erő, a sebesség és más vektormennyiségek ábrázolására, ezért a vektorokat az irányított szakasszal azonosították. A mai matematikában a vektor fogalma sokkal bővebb tartalmat jelent. A vektor a vektortér eleme. Vektorteret alkot bármely halmaz, amelyen értelmezve van az összeadás és a számmal való szorzás művelete (ebben az

esetben az összeadásnak és a szorzásnak is 4–4 törvénye). Példák vektortérre: a tér pontpárjainak halmaza; valós számhármasok halmaza; a sík vagy a tér párhuzamos eltolásainak halmaza stb.

A kétdimenziós térben (a síkban) a pontot és a vektort két koordináta határoz meg, a háromdimenziós térben pedig három koordináta. Hasonlóképpen értelmezhető az olyan tér, ahol a pontot vagy a vektort négy koordináta határoz meg. Az ilyen tér négydimenziós. Ami csodálatos téma a sci-fi írók számára. A többdimenziós terekkel gyakorlati szemszögből is foglalkozó matematikusok realitásként fogják fel azokat.

A négydimenziós tér kidolgozói közül az egyik M. I. Gulak ukrán tudós, közéleti személyiség.



MIKOLA IVANOVICS GULAK

(1822–1899)

A Poltava területen született, a kijevi kormányzói hivatal munkatársa. Cirill és Metód Baráti Társaság egyik alapítója. Ezért 1847-ben letartóztatták. Csak 12 év után tért vissza Ukrajnába. Matematika-, földrajz- és orosz nyelvtanár volt Odesszában, Kercsben, Szevasztopolban és Grúziában.

1877-ben Tbilisziben publikálta *A négydimenziójú tér próbája* című monográfiáját. A másik munkáját *A transzcendens egyenletek etűdjei* (francia nyelven írta) Odesszában adta ki. P. Ivancsuk könyvet írt Mikola Ivanovics Gulakról *A negyedik dimenzió* címmel.

Az 5. fejezet összefoglalása

A *derékszögű koordináta-rendszer* lehetőséget teremt egyértelmű hozzárendelésre a tér pontjai és a valós rendezett számhármasok között: $A(x; y; z)$ egy olyan pont, melynek az abszcisszája x, ordinátája y és aplikátája z.

Két pont távolságának négyzete egyenlő a megfelelő koordináták különbségei négyzeteinek összegével.

Ha a $C(x; y; z)$ pont az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ végpontú szakasz felezőpontja, akkor

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

A sík egyenlete: $ax + by + cz + d = 0$.

Az r sugarú gömbfelület egyenlete, ha:

a gömbfelület origó középpontú

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

a gömbfelület középpontja az $A(x; y; z)$ pont

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

A *vektor* a vektortér eleme. A nem nullvektort irányított szakasszal lehet ábrázolni. Bármely vektort célszerű koordinátáival megadni.

Az $A(x_1; y_1; z_1)$ kezdőpontú és $B(x_2; y_2; z_2)$ végpontú vektor koordinátáinak nevezzük az $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ és $z = z_2 - z_1$ számokat. Jelölése $\overrightarrow{AB} = (x; y; z)$.

A *vektor abszolút* értékének nevezzük az irányított szakasz hosszát. Jelölése $|\overrightarrow{AB}|$ vagy $|\vec{a}|$.

Ha $\vec{a} = (x; y; z)$, akkor $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektor összegének az $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ vektort nevezzük.

Vektorok összeadása kommutatív és asszociatív. Vektorokat háromszög, paralelogramma vagy paralelepipedon szabály szerint lehet összeadni.

Az A, B, C és D pontok bármely térbeli elhelyezkedése esetén teljesül az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ egyenlőség.

Az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektor különbségét az

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

képlettel lehet meghatározni.

Tetszőleges $\vec{a} = (x; y; z)$ vektor megszorozható bármely k számra úgy, hogy:

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz).$$

Bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra, valamint m és n valós számra igaz, hogy:

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b};\ (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};\ m\vec{a} = m \cdot |\vec{a}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának nevezzük a vektorok hosszainak és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Ha $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.



A matematikus az eszméket meghatározott formákba önti...
A szépség és a szigorúság ezen formák
tökéletesítésének kritériumai.

Godfrey Harold Hardy

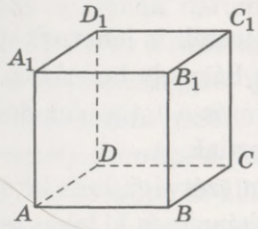
6 Mértani testek. A mértani testek térfogata és felszíne

A FEJEZET TÉMAKÖREI

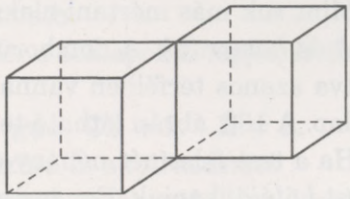
- Mértani testek és soklapok (poliéderek).
- Hasáb. Egyenes és szabályos hasáb. Paralelepipedon.
- Gúla. Szabályos gúla.
- A hasáb és a gúla felszíne.
- Szabályos soklapok.
- Forgástestek. Henger és kúp.
- Gömb és gömbfelület. A gömbfelület érintő síkja.
- Testek kombinációja.
- A henger, kúp és gömbfelület felszíne.
- A hasáb és a henger térfogata.
- Forgástestek térfogata. A gúla, kúp és gömb térfogata.

27. §. Mértani testek és soklapok (poliéderek)

Vizsgáljuk azokat az alakzatokat, melyeket mértani *testeknek nevezünk*. Mértani test például a *kocka* (127. ábra). Felszíne hat egybevágó négyzetből áll. A kocka felszíne a teret két részre osztja: egy belső részre (zárt részre) és egy külső (határtalan) részre. A kocka a felszínének és az általa határolt zárt térrésznek az egyesítése. Minden test egy felszínből és az általa határolt térrészből áll. Úgy tekintjük, hogy a test térrésze egy „darab"-ból áll, és minden pontja vagy a felület, vagy az általa határolt térrész egyik pontja.



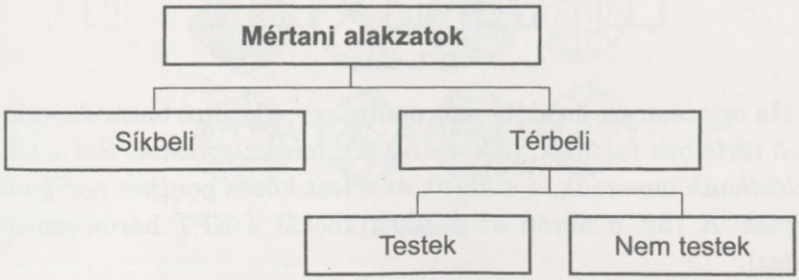
127. ábra



128. ábra

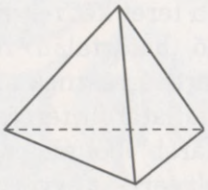
Minden hasáb, gúla, henger, kúp, gömb mértani test. A síkidom, a görbe, a felület nem test, mert nem háromdimenziós. Nem tekintjük mértani testnek két olyan kockát sem, melyeknek van közös élük (128. ábra), mert ebben az esetben nem egy közös zárt térrész van, hanem két elkülönült térrész.

Mivel a mértan másmilyen testekkel nem foglalkozik, csak mértani testekkel, így ezeket egyszerűen csak *testeknek* fogjuk nevezni. A mértani alakzatokat az alábbiak szerint lehet osztályozni:

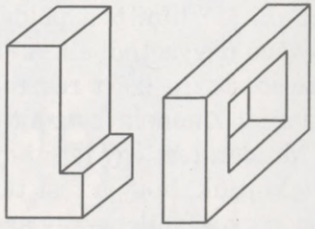


Azokat a testeket, melyek felszíne sokszögekből áll, *soklapoknak* nevezzük. Ezeket a sokszögeket, a sokszögek oldalait és csúcsait a *soklap lapjainak*, *éleinek*, *csúcsainak* nevezzük.

Egy soklapnak legkevesebb 4 lapja lehet. Azt a soklapot, melynek négy lapja van, *tetraédernek* nevezzük. Ha egy tetraéder minden éle egyenlő hosszúságú, akkor a *tetraédert szabályosnak* nevezzük (129. ábra).



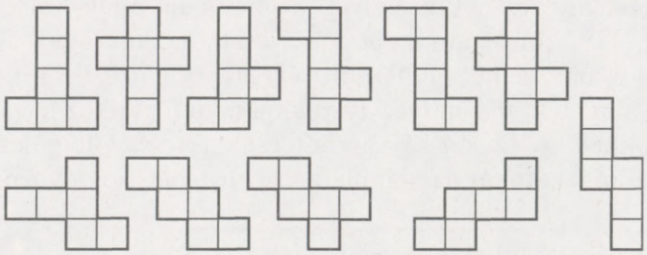
129. ábra



130. ábra

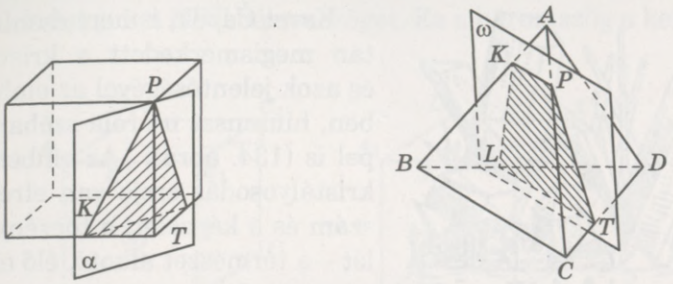
Mint sok más mértani alakzat, így a testek is lehetnek *domborúak* és *homorúak*. A domború soklapok bármely lapjukhoz viszonyítva azonos térfélben vannak. A kocka és a tetraéder domború soklap. A 130. ábrán látható testek homorúak.

Ha a test felszínét néhány éle mentén szétvágjuk és kiterítjük, a test *hálóját* kapjuk. Egy testet többféleképpen is ki lehet teríteni. Például a kockának 11-féle testhálója van (131. ábra). A *soklap felszíne* a határoló lapok területeinek összege, ami a háló területével egyenlő.



131. ábra

Ha egy testnek legalább két pontja egy sík által határolt különböző térfélhez tartozik, akkor ez a sík metszi a testet. Ezt a síkot *szelősíknak* nevezzük, a szelősík és a test közös pontjait pedig *metszetnek*. A 132. *a* ábrán az α sík a kockát a *KPT* háromszögben metszi.



a) b)

132. ábra

A 132. *b* ábrán egy *ABCD* tetraéder látható és a ω szelősík, melyek metszete a *KPTL* négyszög.

Ahhoz, hogy megszerkesszük a soklap és egy sík metszetét, meg kell adni a síknak három, nem egy egyenesre illeszkedő pontját; egy egyenesét és a rajta kívüli pontot stb.

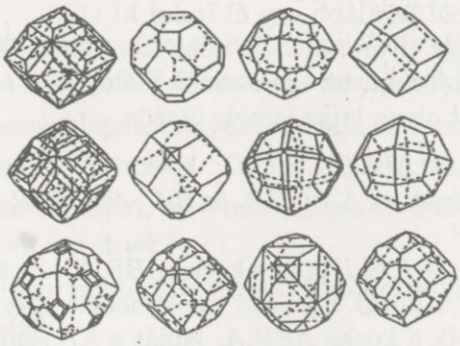
Érdekes összefüggést igazolt Euler a soklapok ***L*** lapjai, ***É*** élei és ***CS*** csúcsai száma között:

***bármely domború poliéderre igaz*: CS + L – É = 2.**

Ellenőrizd le ezt az állítást a kockára és a tetraéderre!

Különböző, néha nagyon is összetett és bonyolult soklapokkal foglalkoznak a kőfejtők, ácsok, köszörűsök, asztalosok, esztergályosok, ékszerészek, ásványkutatók, kristálykutatók és mások.

A 133. ábrán a gránátkristály természetben előforduló alakjai láthatók.



133. ábra



134. ábra

Karel Čapek, ismert cseh író, miután megismerkedett a kristályokkal és azok jelentőségével az ember életében, himnuszt írt róla szóban és képpel is (134. ábra): „Az emberben is a kristályosodás ereje van elrejtve... A szám és a képzelet, a törvény és a jólét – a természet alkotó, élő ereje.

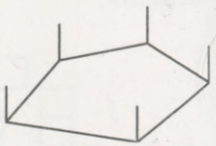
ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a soklap, a poliéder? Sorold fel az elemeit!
2. Mi a kapcsolat a mértani alakzat, a test és a soklap között? Ábrázold diagramon!
3. Mely soklapok domborúak és melyek homorúak?
4. Mi a soklap felszíne?
5. Fogalmazd meg Euler poliédertételét!

Közös munka

1. Egy soklapnak 9 éle van. Igazold, hogy nem lehet ötszögű lapja!

● **Megoldás.** Tegyük fel, hogy van a soklapnak ötszögű lapja. Akkor ennek a lapnak minden csúcsából legalább egy él indul ki (135. ábra). Akkor egy ilyen testnek nem kevesebb, mint 10 éle van. Tehát, ha egy testnek 9 éle van, akkor nem lehet olyan lapja, amely ötszög.

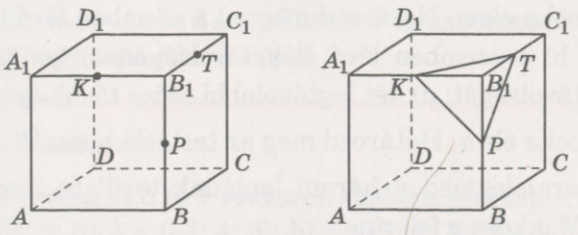


135. ábra

2. Ábrázold az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka és azon sík metszetét, melyre illeszkednek az A_1B_1, BB_1 és B_1C_1 élek K, P és T felezőpontjai (136. *a* ábra)!

● **Megoldás.** A K és P pont a kocka ABB_1A_1 lapjában és a metsző síkban van (136. *b* ábra). Így ezen síkok metsző egyenese a KP egyenes. A metsző sík a kocka ABB_1A_1 lapját a KP szakaszban metszi. Hasonlóképpen meggyőződhetünk arról, hogy a kocka másik két lapját ez a sík a KT és TP szakaszban metszi. Meghúzva ezeket a

szakaszokat kapjuk a KPT háromszöget. Ez a háromszög a keresett metszet.



136. ábra

Szóbeli feladatok

861. Hozz fel példákat környezetedből testre!

862. Hozz fel példákat olyan alakzatra, ami nem test!

863. Hozz fel példákat környezetedből poliéderre! Ezek közül melyek domborúak és melyek homorúak?

864. Nevezd meg azt a poliédert, melynek legkevesebb lapja van! Hány éle, csúcsa van ennek a testnek?

865. Hány csúcsa, éle és lapja van egy kockának?

866. Egy kocka éle a. Mekkora ennek a kockának a felszíne?

867. Egy kocka felszíne 6 dm^2. Határozd meg a kocka élét!

A

868. Rajzolj olyan soklapot, melynek 4 lapja van! Hány csúcsa, éle van ennek a soklapnak? Mi a neve ennek a soklapnak?

869. Rajzolj olyan soklapot, melynek 5 lapja és 5 csúcsa van! Hány éle van ennek a testnek?

870. Rajzolj olyan soklapot, melynek 5 lapja és 6 csúcsa van! Hány éle van ennek a testnek?

871. Létezik-e olyan soklap, melynek minden lapja háromszög és nem tetraéder?

872. Rajzold le annak a szabályos tetraédernek a hálóját, melynek minden éle 2 cm! Határozd meg a háló területét!

873. Egy szabályos tetraéder felszíne 36 cm^2. Határozd meg a tetraéder élét!

874. Egy kocka éle a. Határozd meg: a) a szemben lévő lapok távolságát; b) a szemben lévő élek távolságát; c) két legközelebbi csúcs távolságát; d) két legtávolabbi csúcs távolságát!

875. Egy kocka éle a. Határozd meg az testátló hosszát!

876. Egy paralelepipedon három lapjának területe 2 m^2, 3 m^2 és 4 m^2. Mekkora a felszíne?

877. Az egyik kocka éle 3-szor nagyobb egy másik kocka élénél. Mekkora a kockák felszíneinek aránya?

878. Mekkora két szabályos tetraéder éleinek aránya, ha felszínük S_1 és S_2?

B

879. Ábrázolj két alakzatot úgy, hogy: a) egyesítésük test legyen; b) metszetük legyen test; c) egyesítésük ne legyen test; d) metszetük ne legyen test!

880. A K pont az $ABCD$ tetraéder AD élének felezőpontja. Ábrázold a tetraéder és a B, C és K pontokra illeszkedő sík metszetét!

881. Egy szabályos tetraéder éle a. Ábrázold a tetraéder és az egy csúcsból kiinduló élek felezőpontjaira illeszkedő sík metszetét! Határozd meg a síkmetszet kerületét és területét!

882. Egy téglatest egy csúcsból kiinduló három éle 6 cm, 6 cm és 8 cm. Rajzold meg a téglatest és az adott élek felezőpontjain átmenő sík metszetét! Határozd meg a síkmetszet kerületét!

883. Rajzold meg az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű paralelepipedon és az A, B_1 és D_1 pontokra illeszkedő sík metszetét; az A, C pontra és a DD_1 él felezőpontján átmenő sík metszetét!

884. Adva van az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Ábrázold a kocka és az A, B_1 és C pontokra illeszkedő sík metszetét! Határozd meg a síkmetszet kerületét, ha $AB = 5$ cm!

885. Az $ABCD$ szabályos tetraéder, a K és a P pont az AB és BC élek felezőpontjai. Határozd meg a tetraéder és a K, P és D pontokra illeszkedő sík metszetének kerületét, ha $AB = 10$ cm!

886. Ellenőrizd le példákon, ha egy domború soklapoknak L lapja, É éle és CS csúcsa van, akkor CS + L – É = 2!

887. Gyakorlati feladat. Készítsd el kartonpapírból: a) egy kocka; b) egy tetraéder hálóját!

Ismétlő feladatok

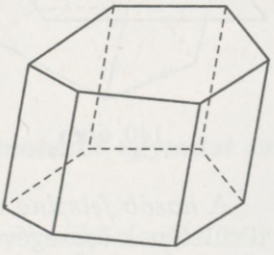
888. Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát:
a) $\vec{a} = (3; 4; 5)$, $\vec{b} = (-3; 4; 5)$; b) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 5)$!

889. Határozd meg az MN szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $M(2; 4; -8)$ és $N(-2; 6; 0)$!

890. Határozd meg az ABC háromszög kerületét, ha $A(0; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$ és $C(0; 0; 4)$!

28. §. Hasábok

Azt a soklapot, melynek két lapja egybevágó n-szög, a többi n lapja pedig paralelogramma, *n-oldalú hasábnak* nevezzük (137. ábra). A definícióban szereplő egybevágó sokszöget a *hasáb alaplapjának* nevezzük. Ezen sokszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, így az alaplapok párhuzamos síkokban vannak. A hasáb alaplapjaitól különböző lapjait *oldallapoknak*, alapéleitől különböző éleit *oldaléleknek* nevezzük.

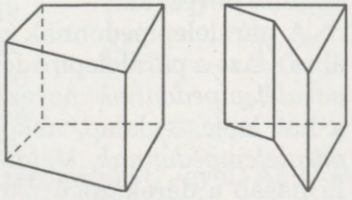


137. ábra

A hasábot *egyenesnek* nevezzük, ha oldalélei merőlegesek az alaplapokra. Az összes többi hasábot *ferde* hasábnak nevezzük. A *hasáb magassága* az alaplapok távolsága. Az egyenes hasáb magassága egyenlő az oldalél hosszával.

A hasábok lehetnek *domború*ak (138. *a* ábra) és *homorú*ak (138. *b* ábra). Egy hasáb *szabályos*, ha egyenes és alaplapja szabályos sokszög.

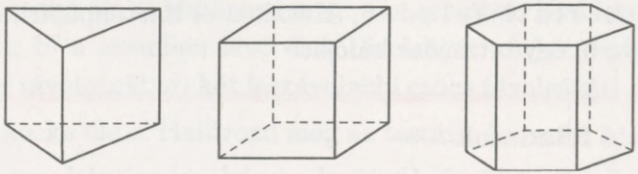
Az egyenes hasáb minden oldallapja téglalap. A 139. ábrán egy szabályos háromoldalú, négyoldalú és hatoldalú hasáb látható. Minden sza-



a) b)

138. ábra

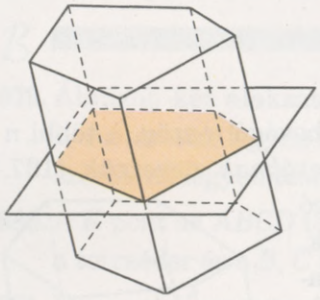
bályos hasáb domború. A szabályos hasáb minden oldallapja egybevágó téglalap.



a) b) c)

139. ábra

A hasáb oldalélére és alaplapjának átlójára illeszkedő síkmetszetet *átlós síkmetszetnek* nevezzük. A hasáb átlós síkmetszete paralelogramma, az egyenes hasábé pedig téglalap. A hasáb átlójának, az átlós síkmetszetének átlóját nevezzük. Az alapokkal párhuzamos síkmetszet olyan sokszög, amely egybevágó az alaplapokkal (140. ábra).



140. ábra

A *hasáb palástjának a területe* (oldalfelszíne) az összes oldallap területének összege.

Az egyenes hasáb palástjának a területe egyenlő az alap kerületének és a hasáb magasságának szorzatával:

$$S_p = P \cdot h.$$

(Ezt az állítást próbáljátok meg önállóan igazolni!)

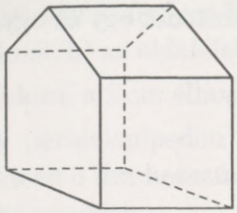
A *hasáb felszíne* egyenlő a palást területének és a két alaplap területének összegével:

$$S = S_p + 2S_a.$$

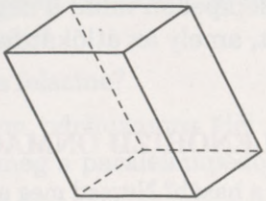
Tekinthetjük-e a 141. ábrán látható soklapot hasábnak? Igen, ez egy hasáb, csak az oldallapjára van fektetve. Az alakzat neve nem függ attól, hogyan helyezkedik el a térben.

Azt a hasábot, melynek alaplapja paralelogramma, *paralelepipedonnak* nevezzük.

A paralelepipedonnak mind a hat lapja paralelogramma (142. ábra). Azt a paralelepipedont, melynek négy lapja téglalap, *egyenes paralelepipedonnak* nevezzük. Ha egy paralelepipedonnak mind a hat lapja téglalap, akkor az ilyen paralelepipedont *derékszögű paralelepipedonnak, téglatestnek* nevezzük. A szabályos négyoldalú hasáb a derékszögű paralelepipedon egyik részesete. Azt a derékszögű paralelepipedont, melynek minden éle egyenlő, *kockának* nevezzük.

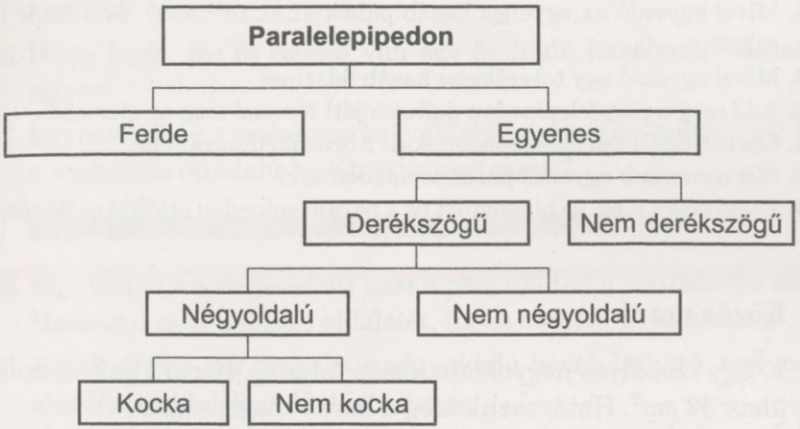


141. ábra



142. ábra

A paralelepipedon osztályozását az alábbi ábra szemlélteti:

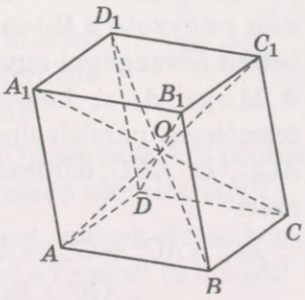


143. ábra

6. tétel. ***A paralelepipedon átlói metszik egymást és metszéspontjukban felezik egymást.***

● **Bizonyítás.**

Legyen az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tetszőleges paralelepipedon (144. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az AC_1, BD_1, CA_1 és DB_1 átlók felezőpontjai egy és ugyanaz a pont. Az AB, DC, D_1C_1 és A_1B_1 élek egyenlők és párhuzamosak, így az ABC_1D_1 és DCB_1A_1 négyszögek paralelogrammák. A paralelogramma átlói metszéspontjukban felezik egymást. Jelöljük az első paralelogramma AC_1 és BD_1 átlóinak metszéspontját O-val, a második paralelogramma DB_1 és CA_1 átlóinak metszéspontját O_1-gyel. Az O és O_1 pontok az AC_1 és DB_1 szakaszok felezőpontjai, mely szakaszok viszont az ADC_1B_1 paralelogramma átlói, így egybeesnek. Tehát a



144. ábra

paralelepipedon mind a négy átlójára illeszkedik egy és ugyanaz az O pont, amely az átlókat felezi.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a hasáb? Nevezd meg a hasáb elemeit!
2. Milyen hasábokat különböztetünk meg?
3. Mi az egyenes hasáb? A szabályos?
4. Mi a hasáb átlója? Az átlós síkmetszete?
5. Mivel egyenlő az egyenes hasáb palástjának területe? És a ferde hasábé?
6. Mivel egyenlő egy tetszőleges hasáb felszíne?
7. Add meg a paralelepipedon definícióját! Nevezd meg az elemeit!
8. Osztályozd a paralelepipedonokat! Ábrázold diagramon!
9. Mit nevezünk egyenes paralelepipedonnak?
10. Fogalmazd meg, és bizonyítsd be a paralelepipedon átlóiról szóló tételt!

Közös munka

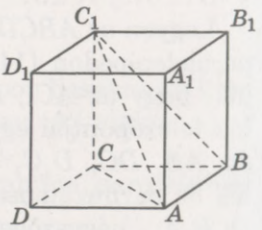
1. Egy szabályos négyoldalú hasáb felszíne 40 cm^2, palástjának a területe 32 cm^2. Határozzuk meg a hasáb magasságát!

● Megoldás. Az alaplapok területeinek az összege $40 - 32 = 8$ (cm^2), az egyik alaplap területe tehát 4 cm^2. Ezért az oldala 2 cm. Az egyik oldallap területe $32 : 4 = 8$ (cm^2). Ha a hasáb magassága h, akkor $2h = 8$, innen $h = 4$ (cm).

2. Bizonyítsd be, hogy **a téglatest átlójának négyzete a lineáris méretei négyzetének összegével egyenlő.**

● Megoldás. Legyen az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tetszőleges paralelepipedon (145. ábra). Az ACC_1 és ABC háromszögek derékszögűek, ezért

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = \\ = AB^2 + BC^2 + BB_1^2.$$



145. ábra

Szóbeli feladatok

891. Hozz fel környezetedből példát hasábra!

892. Adott egy szabályos háromoldalú hasáb. Mekkora: a) az alapéleknél; b) az oldaléleknél lévő lapszög?

893. Mekkora a 2 cm élhosszúságú kocka felszíne?

894. Egy paralelepipedon páronként nem párhuzamos élei 1 dm, 2 dm és 3 dm hosszúak. Határozd meg a paralelepipedon éleinek összegét!

895. Egy paralelepipedon három lapjának területe 2 cm^2, 3 cm^2 és 4 cm^2. Mekkora a paralelepipedon felszíne? Palástjának területe?

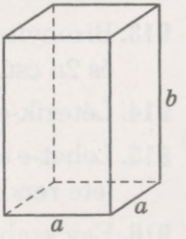
896. Hány lapja, éle és csúcsa van egy ötoldalú hasábnak? Készíts rajzot!

897. Egybevágók-e a szabályos négyoldalú hasáb átlós metszetei? És a szabályos ötoldalú hasáb átlós metszetei?

A

898. Egy szabályos négyoldalú hasáb palástjának a területe 48 cm^2. Határozd meg a hasáb oldalélét, ha az alapéle 4 cm hosszú!

899. A 146. ábrán egy szabályos négyoldalú hasáb látható, melynek alapéle a, oldaléle b. Határozd meg:
a) az oldallap területét;
b) az alaplap területét;
c) a palást területét;
d) a felszínét;
e) az alaplap átlóját;
f) az oldallap átlóját!



146. ábra

900. Egy szabályos háromoldalú hasáb minden éle egyenlő hosszúságú. Palástjának területe 27 cm^2. Határozd meg az alaplap területét!

901. Rajzold meg az $ABCA_1B_1C_1$ háromoldalú hasáb és az A, B pontra valamint az A_1C_1 él felezőpontjára illeszkedő sík metszetét!

902. Egy hasáb három lapja egybevágó négyzet, melyek oldala 2 cm, másik két lapja háromszög. Ábrázold ezt a hasábot és hálóját!

903. Határozd meg annak a téglatestnek a felszínét, melynek méretei: a) 10 cm; 16 cm és 22 cm; b) a, b, c!

904. Adva van egy paralelepipedon, melynek minden lapja a oldalú és α hegyesszögű rombusz. Mekkora a felszíne?

905. Határozd meg annak a téglatestnek az átlóját, melynek méretei 3 cm, 4 cm és 12 cm!

906. Számítsd ki annak a téglatestnek a felszínét, melynek méretei 4 cm, 4 cm és 10 cm!

907. Egy téglatest élei egyenesen arányosak az 1, 2 és 3 számokkal. Határozd meg a téglatest méreteit, ha a felszíne 550 cm^2!

908. Egy tégla mérete 250×120×65 mm. Határozd meg a tégla legtávolabbi csúcsai közötti távolságot!

909. Egy téglatest három lapjának területe 42 cm^2, 72 cm^2 és 84 cm^2. Határozd meg az élek hosszát!

910. Határozd meg annak a kockának az átlóját, melynek az éle a!

911. Számítsd ki a szabályos négyoldalú hasáb átlós síkmetszetének területét, ha a hasáb magassága 10 cm, alaplapjának területe pedig 144 cm^2!

912. Egy szabályos négyoldalú hasáb felszíne 40 cm^2, palástjának területe 32 cm^2. Mekkora a hasáb magassága?

B

913. Bizonyítsd be, hogy egy n oldalú hasábnak $n + 2$ lapja, $3n$ éle és $2n$ csúcsa van!

914. Létezik-e olyan hasáb, melynek 100 éle van?

915. Lehet-e egy szabályos háromoldalú hasáb oldallapjainak a területe rendre 20 cm^2, 30 cm^2 és 50 cm^2?

916. Egy szabályos négyoldalú hasáb átlós metszetének területe S. Határozd meg a palást területét!

917. Adva van az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű paralelepipedon. A K, L és M pontok az AB, A_1B_1 és B_1C_1 élek felezőpontjai. Rajzold meg a hasábnak a K, L és M pontokra illeszkedő síkmetszetét! Határozd meg a síkmetszet területét, ha $AA_1 = 6$ cm, $LM = 10$ cm!

918. Egy téglatest alapélei 6 cm és 8 cm, oldaléle 12 cm. Határozd meg a hasáb B, C_1 és D pontokon átmenő síkmetszetének területét!

919. Egy téglatest méretei 3, 4 és 5. Határozd meg a testátló és a legkisebb lap hajlásszögét!

920. Egy szabályos négyoldalú hasáb magassága h, alapéle a. Számítsd ki: a) a hasáb felszínét; b) a hasáb testátlójának hosszát; c) a hasáb átlós metszetének területét!

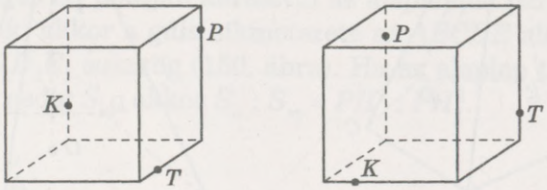
921. Egy hasáb oldaléle l és α szöget zár be az alaplappal. Határozd meg a hasáb magasságát!

922. Egy szabályos négyoldalú hasáb testátlója d és φ szöget zár be az alaplappal. Határozd meg: a) az átlós metszet területét; b) a palást felszínének területét!

923. Egy téglatest alakú szobán két ablak és egy ajtó van. Hány tekercs mintanélküli tapétára van szükség a szoba felújításához, ha a szoba méretei 4×5×2,8; az ablaké 1,2×1,8; az ajtóé 0,9×2,1; a tekercsé 0,5×10. Számíts 5%-ot hulladékra!

924. Rajzolj egy téglatestet! Jelölj az éleken egy M, K és H pontot úgy, hogy a téglatest és az MKH sík metszete ötszög legyen!.

925. Rajzold át a 147. ábrát a füzetedbe, és rajzold meg a poliéder és a KPT sík metszetét!



147. ábra

926. Fejtörő. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ szabályos hasábban $AA_1 = 15$ cm, $AB = BC = 5$ cm. Határozd meg az AB és C_1D_1 élek felezőpontjai közötti legrövidebb távolságot!

927. Gyakorlati feladat. Készítsd el egy ferde hasáb kiterítését (hálóját)!

Ismétlő feladatok

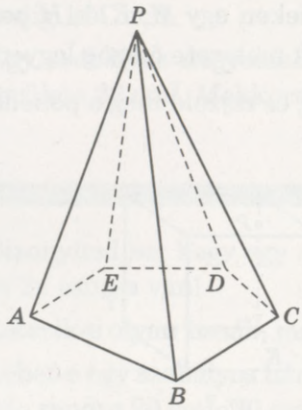
928. A BC_1D sík az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát két soklapra bontja. Hány csúcsuk, élük és lapjuk van a keletkezett testeknek?

929. Számítsd ki az $\vec{a} = (1; 2; -3)$ és $\vec{b} = (-5; 1; -1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét!

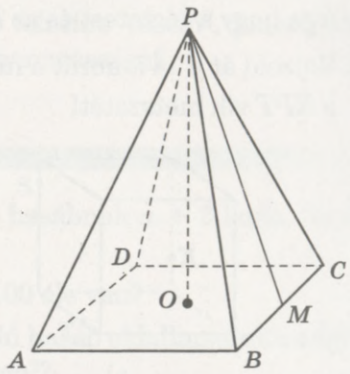
930. Rajzolj olyan poliédert, melynek 7 lapja van! Hány csúcsa és éle lehet ennek a soklapnak?

29. §. Gúla

A *gúla* olyan poliéder, melynek egyik lapja sokszög, a többi lapja pedig olyan háromszög, melynek van közös csúcsa (148. ábra). Ezek a háromszögek a *gúla oldallapjai*, a közös csúcsuk a *gúla csúcsa*. Az a lap, ami nem oldallap, az a gúla *alaplapja*. Az alaplap oldalainak számától függően megkülönböztetünk háromoldalú, négyoldalú, ..., n oldalú gúlát. A háromoldalú gúlát még *tetraédernek* is nevezik.



148. ábra



149. ábra

Azt az élet, amely nem oldala az alaplapnak, *oldalélnek* nevezzük. Azt a síkot, ami a gúla két nem szomszédos oldalélén megy át, és a gúlát háromszögben metszi, *átlós metszetnek* nevezzük. A gúla *magasságának* nevezzük, a csúcsból az alaplap síkjára bocsátott merőleges szakaszt. Ennek a szakasznak a hosszát is nevezik a gúla magasságának. Ezek homonimák.

Egy gúla *szabályos*, ha alaplapja szabályos sokszög, melynek középpontja a gúla magasságának talppontja. A szabályos gúla minden oldaléle egyenlő hosszúságú, minden oldallapja egybevágó egyenlő szárú háromszög. (Igazold önállóan!) Az oldallapnak a gúla csúcsából húzott magasságát *apotémának* nevezzük. A nem szabályos gúlának nincs apotémája. A 149. ábrán egy szabályos

négyoldalú látható gúla. A PO szakasz a gúla magassága, PM az apotémája.

Az oldallapok együttesen alkotják a gúla palástját.

7. tétel. ***A szabályos gúla palástjának a területe az alaplap félkerületének és a gúla apotémájának a szorzatával egyenlő.***

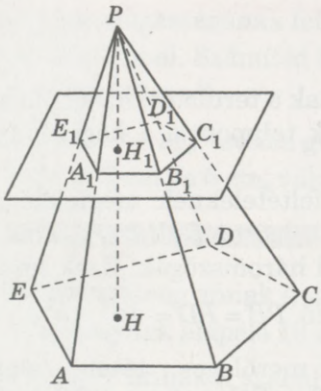
● **Bizonyítás.** Legyen egy szabályos n oldalú gúla alapéle a, apotémája l, akkor egy oldallap területe $\frac{1}{2}al$. A gúla palástja n ilyen háromszögből áll. Ezért, ha a gúla alaplapjának a kerülete P, akkor a gúla palástjának a területe

$$S_p = \frac{1}{2}al \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l = \frac{1}{2}P \cdot l.$$

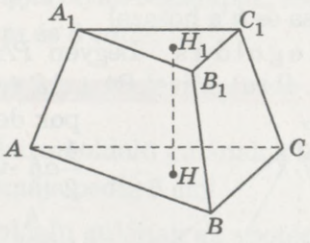
Ahhoz, hogy meghatározzuk a gúla felszínét, a palást területéhez hozzá kell adni az alaplap területét:

$$S_t = S_p + S_a.$$

Legyen a $PABCDE$ tetszőleges gúla. Ha a gúla PH magasságának tetszőleges H_1 pontján keresztül az alaplappal párhuzamos síkot fektetünk, akkor a gúla síkmetszete az $ABCDE$ alaplappal hasonló $A_1B_1C_1D_1E_1$ sokszög (150. ábra). Ha az alaplap területe S_a a síkmetszeté pedig S_m, akkor $S_a : S_m = PH^2 : PH_1^2$.



150. ábra



151. ábra

Tehát *a gúla alaplapjának a területe és az alaplappal párhuzamos síkmetszet területe úgy aránylanak, mint a gúla csúcsának és a síkok távolságainak a négyzetei.*

A bizonyítás elemi, bár a levezetés eléggé hosszadalmas, így eltekintünk tőle. Tekintsünk néhány példát. Ha az alaplappal párhuzamos metsző sík a magasság felezőpontján megy át, akkor a metszet területe négyszer kisebb az alaplap területénél. Mivel $PH : PH_1 = 2 : 1$, ezért $S_a : S_m = PH^2 : PH_1^2 = 4 : 1$.

A gúlának azt a részét, amit az alaplapja és a vele párhuzamos síkmetszete határol, *csonka gúlának* nevezzük (151. ábra). A csonka gúla párhuzamos lapjait *alaplapoknak*, a többi lapját *oldallapoknak* nevezzük. A *csonka gúla magassága* az alaplapok távolsága. A csonka gúla *szabályos*, ha egy szabályos gúla része. Minden csonka gúla alaplapjai hasonló sokszögek, oldallapjai pedig trapézok.

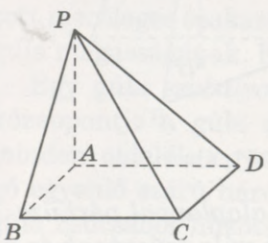
ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Definiáld a gúlát! Nevezd meg az elemeit!
2. Milyen gúlák vannak? Ábrázold a gúlák osztályozását diagramon!
3. Mi a gúla átlós szelősíkja? Mi a gúla átlós síkmetszete?
4. Melyik gúla szabályos?
5. Mi a gúla apotémája?
6. Mivel egyenlő a szabályos gúla palástjának a területe?
7. Mi a csonka gúla? Nevezd meg az elemeit!
8. Gúla-e a csonka gúla?
9. Milyen csonka gúlákat különböztetünk meg?

Közös munka

1. Határozzuk meg a gúla palástjának a területét, ha a gúla alaplapja a oldalú négyzet, magasságának talppontja a négyzet egyik csúcsa és h a hossza!

● Megoldás. Legyen $PABCD$ a feltételeknek megfelelő gúla (152. ábra). Mivel $PA \perp AB$ és $PA \perp AD$, ezért a PAB és PAD oldallapok derékszögű háromszögek. Ezek területe $\frac{1}{2}ah$ -val egyenlő. $PB = PD = \sqrt{a^2 + h^2}$.



152. ábra

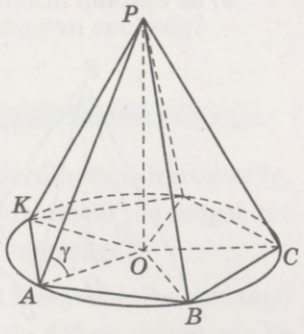
A három merőleges tétele alapján $PB \perp BC$ és $PD \perp DC$, ezért a PBC és PDC oldallapok is derékszögű háromszögek, melyek területe $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + h^2}$.

Ezért a gúla palástjának a területe

$$S_p = 2 \cdot \frac{1}{2}ah + 2\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + h^2} = a(h + \sqrt{a^2 + h^2}).$$

2. Bizonyítsuk be, hogyha a gúla minden oldaléle azonos szöget zár be a gúla alaplapjával, akkor a gúla magasságának talppontja az alaplap köré írt körvonal középpontja!

● **Megoldás.** Ha a *PABC...K* gúla minden oldaléle azonos γ szöget zár be az alaplappal (153. ábra), akkor a *POA*, *POB*, ..., *POK* háromszögek egybevágók (a *PO* befogó és a vele szemben lévő szög alapján). Ezért egyenlők az *OA*, *OB*, ..., *OK* szakaszok is. Tehát az alaplap minden csúcsa illeszkedik az *O* középpontú *OA* sugarú körvonalra.



153. ábra

Szóbeli feladatok

931. Hozz fel környezetedből példákat gúla alakú tárgyra!

932. Hány lapja, éle, csúcsa van egy n oldalú gúlának?

933. Létezik-e olyan gúla, melynek 125 éle van?

934. Határozd meg az a oldalú szabályos tetraéder felszínét!

935. A gúla magasságának felezőpontjára illeszkedő sík párhuzamos az alaplappal. Számítsd ki az alaplap területét, ha a síkmetszet területe 40 cm^2!

936. Lehetnek-e egy csonka gúla alaplapjai olyan téglalapok, melyek oldalai 3 cm és 5 cm, valamint 6 cm és 8 cm?

A

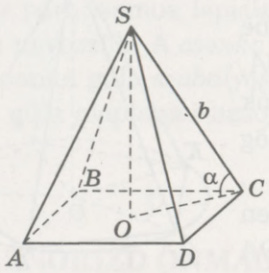
937. Határozd meg annak a szabályos háromoldalú gúlának a felszínét, melynek alapéle 10 cm, apotémája pedig 6 cm!

938. Mekkora annak a szabályos négyoldalú gúlának az apotémája, melynek magassága 4 cm, alapéle pedig 6 cm?

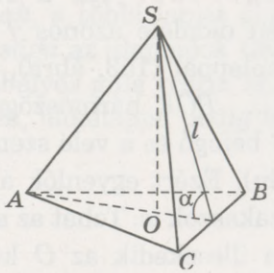
939. Egy szabályos négyoldalú gúla alapélénél lévő lapszöge 60°-os, apotémája pedig 10 cm. Határozd meg a gúla alaplapjának területét!

940. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága és apotámája 30°-os szöget zár be, alapéle pedig a. Mekkora a gúla apotémája?

941. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle b és α szöget zár be az alaplappal (154. ábra). Határozd meg: a) a gúla magasságát; b) az alaplap átlóját; c) az alapélét!



154. ábra



155. ábra

942. Egy szabályos háromoldalú gúla apotémája l és α szöget zár be az alaplappal (155. ábra). Határozd meg: a) a gúla magasságát; b) az alaplap súlyvonalát; c) az alapélét; d) a gúla felszínét!

943. Az egyiptomi Kheopsz-piramis szabályos négyoldalú gúla. Magassága 147 m, alaplapja 5,3 ha. Határozd meg az oldalél és az alaplap hajlásszögét!

944. Egy gúla alaplapja olyan téglalap, melynek oldalai 12 cm és 16 cm. Minden oldaléle 26 cm. Mekkora a gúla magassága?

945. Számítsd ki a gúla palástjának területét, ha az alaplapja 5 cm hosszúságú négyzet, magasságának a talppontja az alaplap egyik csúcsa és 12 cm hosszú!

946. A négyoldalú gúla magassága 4 cm, talppontja pedig az átlók metszéspontja. Határozd meg a gúla felszínét, ha az alaplapja: a) olyan négyzet, melynek az oldala $8\sqrt{3}$ cm; b) olyan téglalap, melynek az oldalai 6 cm és 8 cm; c) olyan rombusz, melynek az átlói 12 cm és 16 cm!

947. Határozd meg a szabályos négyoldalú gúla felszínét, ha: a) az alapéle a és az alapélnél lévő lapszög α; b) oldaléle b és 45°-os

szöget zár be az alaplappal; c) a magasság talppontja és az oldallap távolsága d és az alapélnél lévő lapszög α!

948. Egy tetőszerkezet szabályos négyoldalú gúla alakú, melynek alapéle 5 m, oldallapja 45°-os szöget zár be az alaplappal. Mennyi festék kell a tetőszerkezet kétszeres lefestéséhez, ha 1 m^2 egyrétegű lefestéséhez 150 g festékre van szükség?

B

949. Egy háromoldalú gúla alaplapja olyan derékszögű háromszög, melynek befogói 6 cm és 8 cm. Minden oldaléle 60°-os szöget zár be az alaplappal. Határozd meg a gúla magasságát!

950. Egy gúla alaplapja 10 cm, 10 cm és 12 cm oldalhosszúságú egyenlő szárú háromszög. Minden oldaléle 45°-os szöget zár be az alaplappal. Határozd meg a gúla magasságának talppontja és az oldalalapok távolságát!

951. Bizonyítsd be, ha egy gúla minden alapélének lapszöge egyenlő, akkor a magasságának talppontja az alaplap beírt körének középpontja!

952. A gúla alaplapja olyan derékszögű háromszög, melynek befogói 12 cm és 16 cm. Az alapélek minden lapszöge 60°-os. Határozd meg a gúla magasságát és a palástja területét!

953. Egy gúla alaplapja 11 cm, 24 cm és 31 cm oldalhosszúságú háromszög. A gúla magassága 2 cm. Az alapélek összes lapszöge egyenlő. Határozd meg a lapszöget!

954. A gúla magasságának felezőpontján át az alappal párhuzamosan síkot fektettek. Határozd meg a síkmetszet területét, ha a gúla alaplapjának területe Q!

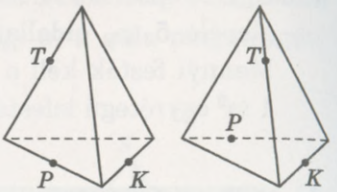
955. Az alappal párhuzamos sík a gúla magasságát 2 : 3 arányban osztja (a gúla csúcsától számítva). Határozd meg a síkmetszet területét, ha az 84 cm^2-rel kisebb a gúla alaplapjának területénél!

956. A gúla magasságának negyedelő pontjain keresztül az alaplappal párhuzamos síkokat fektettek. Határozd meg a síkmetszetek területeit, ha az alaplap területe 16 cm^2!

957. Egy szabályos négyoldalú gúla átlós metszetének területe 2-szer kisebb a gúla alaplapjának területénél. Bizonyítsd be, hogy a gúla szemben lévő oldalélei merőlegesek!

958. Rajzold meg a K, P és T pontokon átmenő sík és a gúla metszetét (156. ábra)!

959. Határozd meg annak a gúlának a felszínét, melynek a csúcsai az $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ és $C(0; 0; 2)$ pontok!



a) b)

156. ábra

960. Mekkora a szabályos hatoldalú gúla átlós síkmetszeteinek a területe, ha az alapélei és a magassága is 6 dm!

961. Egy gúla alaplapja a oldalú szabályos háromszög. Két oldallapja merőleges az alaplapra, a harmadik 30°-os szöget zár be vele. Határozd meg a palást területét!

962. Gyakorlati feladat. Készítsd el egy szabályos négyoldalú gúla hálóját, melynek alapéle 4 cm, oldaléle pedig 8 cm!

Ismétlő feladatok

963. Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg az AC és a DC_1 élek hajlásszögét!

964. Egy egyenes hasáb magassága 4 cm, alaplapja pedig olyan négyzet, melynek oldala 3 cm. Határozd meg a hasáb síkmetszetének területét, amely átmegy az alaplap egyik csúcsán és merőleges az oldallap átlójára!

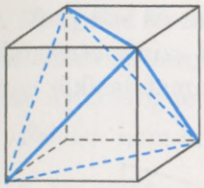
965. Határozd meg az $A(-1; -3; 4)$ pont és az abszcisszatengely közötti távolságot!

30. §. Szabályos poliéderek (soklapok)

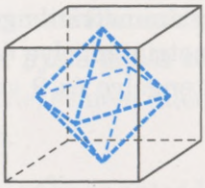
Egy poliéder *szabályos*, ha minden lapja egybevágó sokszög és minden csúcsa azonos távolságra van egy ponttól. Ezt a pontot a *szabályos poliéder középpontjának* nevezzük.

A *kocka* szabályos soklap, mert minden lapja egybevágó négyzet, és minden csúcsa azonos távolságra van a testátlók metszéspontjától.

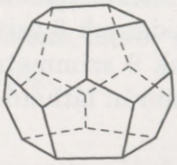
Ha összekötjük a kocka kitérő átlóinak végpontjait, akkor egy *szabályos tetraéder* vázát kapjuk (157. ábra). Mivel minden lapja szabályos háromszög és minden csúcsa azonos távolságra van a kocka középpontjától. Ha összekötjük a kocka szomszédos lapjainak középpontjait, akkor egy szabályos oktaéder vázát kapjuk (158. ábra).



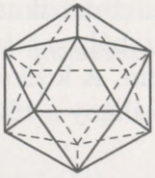
157. ábra



158. ábra



a)

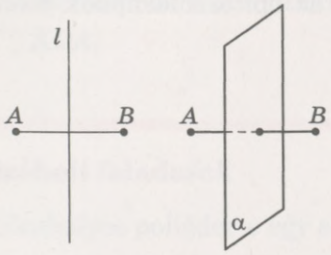


b)

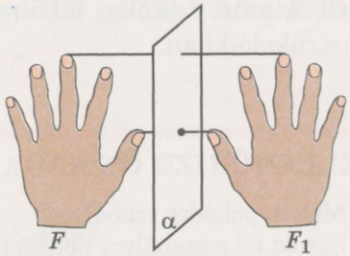
159. ábra

Öt szabályos poliéder létezik. Az eddig említett három szabályos testen kívül létezik még szabályos *dodekaéder* (159. *a* ábra) és a szabályos *ikozaéder* (159. *b* ábra). A tetraéder, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder görög szavak, jelentésük négylapú, nyolclapú, tizenkétlapú, húszlapú. A kockát szokták *hexaédernek* is nevezni (hatlapú).

A szabályos testek tulajdonságait ismerték és alkalmazták is az ókori matematikusok és filozófusok. A mai mértanban a szabályos testek inkább érdekesek, mint többféle szimmetria megjelenési formája.



160. ábra

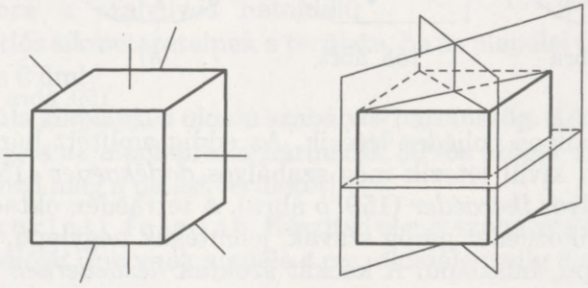


161. ábra

A térben három szimmetriát különböztetünk meg: középpontos, tengelyes, sík. Az A és B pontok *középpontosan tükrösek az O pontra*, ha az O pont az AB szakasz felezőpontja. Az A és B pontok *középpontosan tükrösek egy egyenesre* (síkra), ha az egyenes (a sík) merőleges az AB szakaszra és átmegy a szakasz felezőpontján (160. ábra). Ha egy F alakzat minden pontjának egy pontra (egyenesre vagy síkra) vonatkozó tükörképe az F_1 alakzat egyik pontja, és fordítva is igaz, akkor az F és F_1 alakzatok *tükrösek* pontra

(egyenesre vagy síkra) (161. ábra). Az F alakzat szimmetrikus, ha minden pontjának egy pontra (egyenesre vagy síkra) vonatkozó tükörképe is ugyanezen alakzat egyik pontja. Ebben az esetben az alakzatnak van szimmetriaközéppontja (szimmetriatengelye, szimmetriasíkja).

Minden szabályos test, a tetraéder kivételével, középpontosan szimmetrikus, létezik néhány szimmetriatengelye és -síkja is. A szabályos tetraédernek 3 szimmetriatengelye és 6 szimmetriasíkja van. A kockának 9 szimmetriatengelye és 9 szimmetriasíkja van. Néhány a 162. ábrán látható.



162. ábra

Kocka alakú a konyhasó kristálya, néhány gyémántkristály. Más gyémántok kristályai oktaéder alakúak. A piritkristály (vasszulfid) dodekaéder alakú. A szabályos soklapokat és a belőlük származtatott testeket alkalmaznak az építészmérnökök mértani konstrukcióikban.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Melyik poliéder szabályos?
2. Sorold fel a szabályos poliédereket!
3. Mi a szabályos poliéder középpontja?
4. Sorold fel a szabályos poliéderek legfontosabb tulajdonságait!

Közös munka

1. Egy tanuló így gondolkodik: „Minden hasáb poliéder, ezért minden szabályos hasáb szabályos poliéder. Ugyanígy minden szabályos gúla is szabályos soklap." Igaz-e a tanuló állítása?

• **Megoldás.** Nem. Ha egy hasáb nem négyoldalú, akkor az alaplapja nem egybevágó az oldallappal. Ezért az ilyen hasáb nem lehet szabályos, mert nem minden lapja egybevágó. A hasábok közül csak a kocka szabályos, és minden gúla közül csak a szabályos tetraéder.

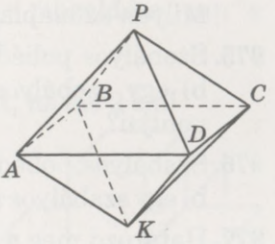
2. Lehet-e egy oktaéder síkmetszete kilencszög?

• **Megoldás.** Egy oktaédernek nyolc lapja van. Ha a szelősík az oktaédernek mind a nyolc lapját metszené, akkor is a síkmetszet csak nyolcszög lehetne, és nem kilencszög.

Felelet: nem lehet.

3. Bizonyítsuk be, hogy az oktaéder szemben lévő lapjai párhuzamos síkokban helyezkednek el.

• **Megoldás.** Legyen $PABCDK$ egy oktaéder (163. ábra). Minden éle és minden átlója egyenlő hosszúságú, ezért a $PBKD$ és $PAKC$ négyszögek négyzetek. Így $PD \parallel BK$ és $PC \parallel AK$. Ezért a PDC sík két egymást metsző egyenese megfelelően párhuzamos az ABK sík két egymást metsző egyenesével. Ezért az oktaéder PDC és ABK lapjai párhuzamos síkokban vannak.



163. ábra

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy $PAD \parallel KCB$, $PAB \parallel KCD$ és $PBC \parallel KDA$.

Szóbeli feladatok

966. Szabályos poliéder-e egy szabályos gúla?

967. Létezik-e olyan gúla, ami szabályos poliéder? És hasáb?

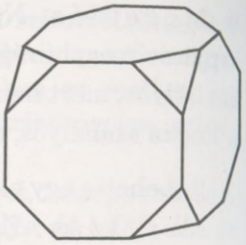
968. Szabályos poliéder-e az a test, ami két szabályos tetraéderből áll, melyeknek közös az alapjuk?

969. Mekkora a hexaéder csúcsainál lévő lapszög?

970. Egy dodekaéder egyik lapjának a területe 10 cm^2. Mekkora a dodekaéder felszíne?

971. Egy hexaéder felszíne 54 cm^2. Mekkora az éle?

972. Egy kocka minden csúcsából levágtak 8 szabályos, egybevágó tetraédert úgy, hogy a kapott test olyan soklap, melynek a lapjai szabályos háromszögek és nyolcszögek (164. ábra). A kapott test szabályos-e? Miért?



164. ábra

973. Két szabályos tetraédert összeillesztettek. Szabályos-e az így kapott hatlapú poliéder, melynek minden lapja szabályos háromszög?

A

974. Milyen négyoldalú gúlából lehet szabályos oktaédert építeni? Milyen az alaplap oldala és a gúla magassága közötti arány?

975. Szabályos poliéder-e az a test, melynek csúcsai: a) egy kocka; b) egy szabályos tetraéder; c) egy oktaéder lapjainak középpontjai?

976. Szabályos poliéder-e az a test, melynek csúcsai: a) egy kocka; b) egy szabályos tetraéder; c) egy oktaéder éleinek felezőpontjai?

977. Határozd meg a szabályos poliéderek csúcsainál lévő lapszögek fokmértékeinek összegét!

978. Határozd meg a hexaéder felszínét, ha az éle: a) 12 cm; b) 0,1 m!

979. Határozd meg a hexaéder élét, ha a felszíne: a) 726 cm^2; b) 1,5 m^2!

980. Hogyan változik meg az 5 cm élhosszúságú hexaéder felszíne, ha az élét megnöveljük: a) 2 cm-rel; b) 2-szeresére!

981. Lehet-e egy hexaéder síkmetszete: a) szabályos háromszög; b) szabályos négyszög? Készíts rajzot!

982. Töltsd ki az alábbi táblázatot, és ellenőrizd le Euler poliédertételét!

	Szabályos tetraéder	Szabályos hexaéder	Szabályos oktaéder	Szabályos dodekaéder	Szabályos ikozaéder
Csúcsok száma					
Élek száma					
Lapok száma					

983. Rajzold le a 2 cm élhosszúságú oktaéder hálóját!

984. Egy szabályos oktaéder éle a. Határozd meg a felszínét!

B

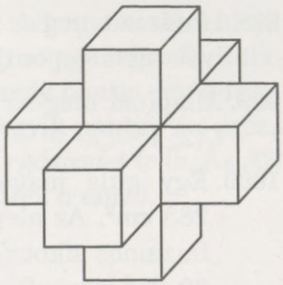
985. Egy szabályos oktaéder középpontja b egységre van a csúcsoktól. Határozd meg az élét!

986. Hány szimmetriatengelye és -síkja van egy szabályos oktaédernek?

987. Egy szabályos oktaéder éle 4 cm. Mekkora az oktaéder szimmetria-síkmetszetének a területe? Hány megoldása van a feladatnak?

988. Számítsd ki a szabályos ikozaéder felszínét, ha éle 2 cm!

989. Az egyik tanulónak olyan testet kellett elkészítenie, mely hét kockából áll (165. ábra). Hogyan kell egy ilyen testet elkészíteni? Mekkora a felszíne?



165. ábra

990. Határozd meg annak a szabályos oktaédernek az élét, melynek a felszíne $8\sqrt{3}$!

991. Hogyan változik meg egy szabályos ikozaéder felszíne, ha minden élét a háromszorosára növeljük?

992. Lehet-e egy szabályos tetraéder síkmetszete négyzet?

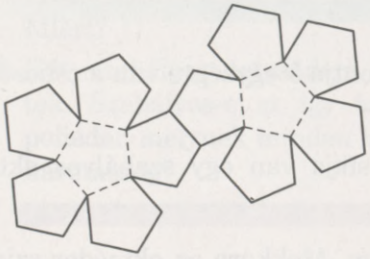
993. Lehet-e egy kocka síkmetszete szabályos: a) háromszög; b) négyszög; c) ötszög; d) hatszög?

994. Bizonyítsd be, hogy egy szabályos test lapja nem lehet hatszög! És hétszög?

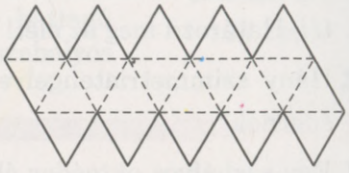
995. Milyen szög alatt látszik a kocka középpontjából a kocka éle? És a szabályos oktaéder éle?

996. Bizonyítsd be, hogy a kocka tetszőleges belső pontjának az oldallapoktól vett távolságainak az összege állandó!

997. Gyakorlati feladat. A 166. és 167. ábrán látható rajzok alapján készítsd el vastag papírból egy szabályos dodekaéder és egy szabályos ikozaéder hálóját! Hagyjál füleket a ragasztásra, és készítsd el ezen testek modelljét!



166. ábra



167. ábra

Ismétlő feladatok

998. Határozd meg az $x - 2y + 4z - 12 = 0$ sík és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit!

999. Állapítsd meg az $ABC\Delta$ fajtáját, ha $A(1; -1; 2)$, $B(0; 2; -1)$ és $C(2; 1; -1)$!

1000. Egy gúla magassága 12 cm, alaplapjának területe pedig 288 cm^2. Az alaptól mekkora távolságra kell az alappal párhuzamos síkot fektetni, hogy a gúla síkmetszetének területe 32 cm^2 legyen?

7. számú önálló munka

1. változat

1. Egy szabályos négyoldalú hasáb magassága 5 cm, alapéle pedig 4 cm. Határozd meg: a) a hasáb felszínét; b) az átló hosszát!

2. Határozd meg annak a szabályos tetraédernek a felszínét, melynek éle a!

2. változat

1. Egy szabályos négyoldalú gúla apotémája 5 cm, alapéle pedig 8 cm. Határozd meg: a) a gúla felszínét; b) magasságát!

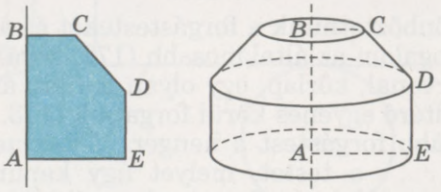
2. Határozd meg annak a szabályos hexaédernek a felszínét, melynek éle a!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Hogyan osztályozhatjuk a mértani testeket?
2. Add meg a poliéder definícióját! Nevezd meg az elemeit!
3. Melyik poliéder domború? Hozz fel példákat!
4. Add meg a hasáb definícióját! Nevezd meg az elemeit! Milyen hasábok vannak?
5. Hogyan kell meghatározni egy szabályos hasáb felszínét?
6. Mi a paralelepipedon? Milyen paralelepipedonok vannak?
7. Fogalmazd meg a paralelepipedon átlójáról szóló tételt!
8. Add meg a gúla definícióját! Nevezd meg az elemeit! Milyen gúlák vannak?
9. Hogyan kell meghatározni a gúla felszínét?
10. Add meg a szabályos soklap definícióját!
11. Sorold fel a szabályos poliédereket!

31. §. Forgástestek

Képzeld el, hogy az $ABCDE$ sokszöget az AB egyenes körül elforgatjuk (168. *a* ábra). Ha ez a sokszög megtesz egy teljes fordulatot, akkor az AB egyenes pontjain kívüli bármely pontja egy körvonalat ír le, melynek középpontja az egyenes egyik pontja. Az egész sokszög, az AB egyenes körül forgatva, egy *forgástestet* ír le. Az AB egyenest a forgástest *tengelyének* nevezzük (168. *b* ábra).

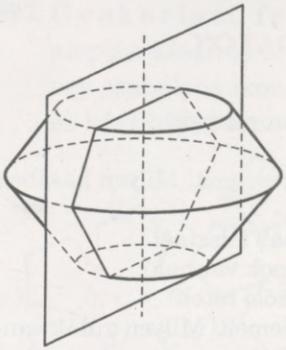


a) b)

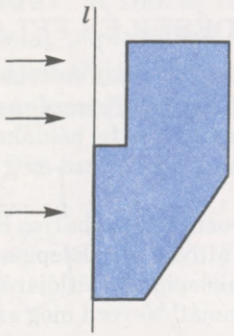
168. ábra

A tengelyen átmenő sík a testet két egybevágó részre osztja, ezt a síkot a test *tengelymetszetének* nevezzük (169. ábra). A forgástest és a tengelyére merőleges szelősík síkmetszete vagy körlap, vagy körgyűrű, vagy több közös középpontú körgyűrű (170. ábra).

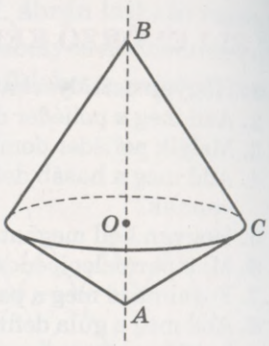
A forgástest meghatározásához elegendő megadni a tengelyt és azt a síkidomot, melyet a tengely körül elforgatunk. A tengely helyet gyakran csak annak egy részét, egy szakaszát adják meg. Például azt is mondhatjuk, hogy az a test, amit egy derékszögű háromszög ír le, ha az átfogója körül forgatjuk (171. ábra).



169. ábra

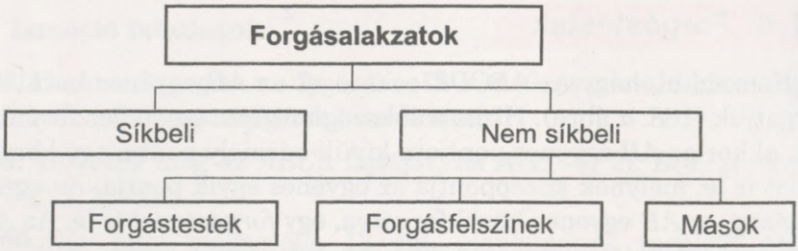


170. ábra



171. ábra

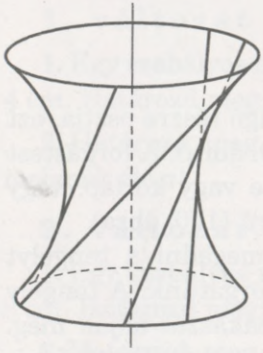
Forgástest alakú tárgyak például: a lencse, tekercs, korong, lombik, kémcső, agyagedény, puskagolyó. Viszont a csavar, az anyacsavar, a fúró már nem forgástest.



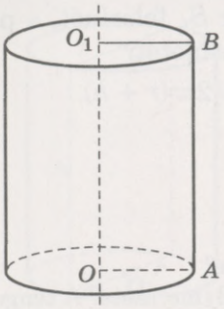
172. ábra

Meg kell különböztetnünk a forgástesteket és a *forgásalakzatokat*. Az utóbbi fogalom az általánosabb (172. ábra). Példák forgásalakzatokra: körvonal, körlap, egy olyan felület, amit egy egyenes ír le, ha a vele kitérő egyenes körül forgatjuk (173. ábra) stb.

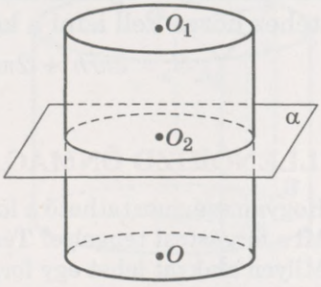
A legegyszerűbb forgástest a henger. *Hengernek* nevezzük azt a testet, melyet úgy kapunk, ha egy téglalapot forgatunk egyik oldala körül. Ha az $OABO_1$ téglalapot az OO_1 oldala körül megforgatjuk, akkor a téglalap OA és O_1B oldalai egybevágó körlapokat írnak le, melyeket a henger *alaplapjainak* nevezzük (174. ábra). Az AB oldal által súrolt felület a henger *palástja*. Ennek a felületnek, minden az AB szakasszal egyenlő hosszúságú szakasza, a henger *alkotója*. A henger minden alkotója egyenlő és párhuzamos egymással, mivel mindegyik egyenlő hosszúságú az AB szakasszal és párhuzamos a forgástengellyel. A henger alkotójának hossza a henger *magassága*.



173. ábra

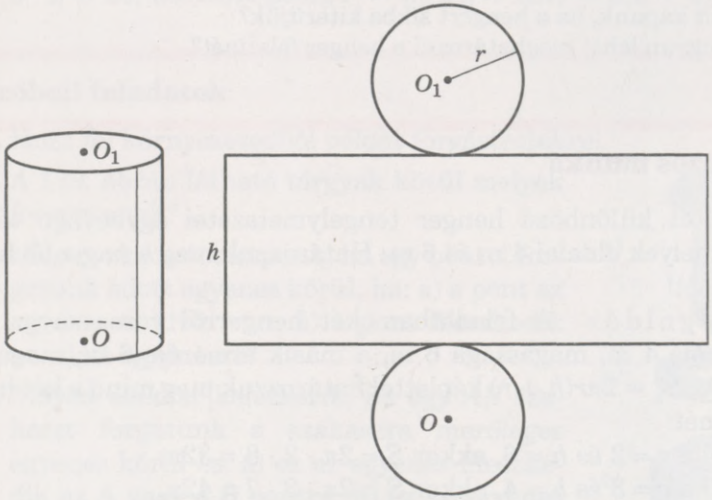


174. ábra



175. ábra

A henger minden tengelymetszete egybevágó téglalap. Mindegyik, a tengellyel párhuzamos síkmetszete is téglalap. Mindegyik, a tengelyre merőleges síkmetszete pedig az alaplappal egybevágó körlap (175. ábra).



176. ábra

Ha egy henger felületét szétvágjuk az alaplapok körvonala és egyik alkotója mentén, majd síkba kiterítjük, akkor megkapjuk a *henger hálóját* (176. ábra). Egy téglalapból, ami a palást kiterítése és két egybevágó körlapból áll. Ha az alaplap r sugarú körlap (amit a henger sugarának is nevezünk) és a magassága h, akkor a kiterítéskor kapott téglalap egyik oldala $2\pi r$ hosszúságú, a másik oldala pedig h. Ennek a kiterítésnek a területe a henger palástjának a területe:

$$S_p = 2\pi rh.$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a henger S_h felszínét, a palást területéhez hozzá kell adni a két alaplap területét:

$$S_h = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ vagy } S_h = 2\pi r(r + h).$$

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Hogyan származtatható a forgástest?
2. Mi a forgástest tengelye? Tengelymetszete?
3. Milyen alakzat lehet egy forgástest tengelymetszete? A tengelyre merőleges síkmetszete?
4. Milyen kapcsolat van a forgásalakzatok és forgástestek között? Ábrázold diagramon!
5. Mi a henger? Nevezd meg az elemeit!
6. Milyen alakzat a henger tengelymetszete?
7. Milyen alakzat a henger tengelyére merőleges síkmetszete?
8. Milyen alakzat a henger tengelyével párhuzamos síkmetszete?
9. Mit kapunk, ha a hengert síkba kiterítjük?
10. Hogyan lehet meghatározni a henger felszínét?

Közös munka

1. Két különböző henger tengelymetszetei egybevágó téglalapok, melyek oldalai 4 m és 6 m. Határozzuk meg a nagyobb henger felszínét!

● **Megoldás.** A feladatban két hengerről van szó: az egyik átmérője 4 m, magassága 6 m, a másik átmérője 6 m, magassága 4 m. Az $S_h = 2\pi r(h + r)$ képlettel határozzuk meg mind a két henger felszínét:

1) ha $r = 2$ és $h = 6$, akkor $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$;

2) ha $r = 3$ és $h = 4$, akkor $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$.

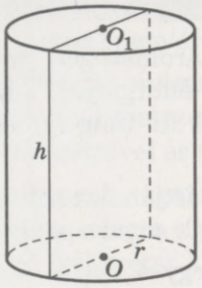
Felelet: 42π m^2.

2. Egy henger tengelymetszetének területe Q. Határozzuk meg a henger palástjának területét!

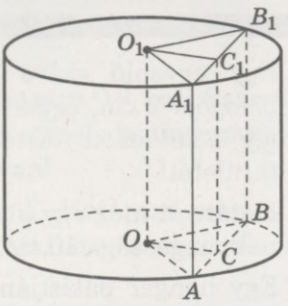
● **Megoldás.** Legyen a henger sugara r, magassága h (177. ábra). Ebben az esetben a henger tengelymetszete $Q = 2rh$, és palástjának területe $S_p = 2\pi rh = \pi \cdot 2rh = \pi Q$.

Felelet: πQ.

3. Egy henger sugara 10, magassága 5. A hengert a tengelyétől 1 egységre a tengellyel párhuzamosan síkkal metszették. Határozd meg a síkmetszet területét és kerületét!



177. ábra



178. ábra

● **Megoldás.** Legyen a henger OO_1 tengelyétől $OC = 1$ egységre lévő sík ABB_1A_1 (178. ábra).

Akkor $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{10 - 1} = 3$.

A keresett síkmetszet területe tehát $S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, kerülete pedig $P = 2(AA_1 + AB) = 2(5 + 6) = 22$.

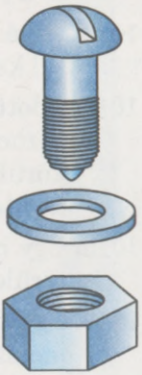
Szóbeli feladatok

1001. Hozz fel környezetedből példát forgástestekre!

1002. A 179. ábrán látható tárgyak közül melyek forgástestek?

1003. Milyen alakzatot kapunk, ha egy pontot forgatunk adott egyenes körül, ha: a) a pont az egyenesen kívül van; b) a pont illeszkedik az adott egyenesre?

1004. Milyen alakzat keletkezik, ha egy AB szakaszt forgatunk a szakaszra merőleges egyenes körül és: a) ez az egyenes illeszkedik az A vagy a B pontra; b) ez az egyenes nem metszi az AB szakaszt; c) ez az egyenes egy C pontban metszi az AB szakaszt?



179. ábra

1005. Hány olyan sík létezik, ami a hengert: a) két hengerre; b) két egybevágó testre darabolja? A henger szimmetriasíkjai-e ezek a síkok?

1006. Hány szimmetriatengelye van egy hengernek? Van-e a hengernek szimmetriaközéppontja?

1007. Mi lesz annak a forgástestnek a tengelymetszete, melyet úgy kapunk, hogy egy szabályos négyoldalú gúlát forgatunk a magassága körül?

A

1008. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, melynek a befogója 2 cm, egyik befogója körül elforgatjuk. Ábrázold az így keletkezett testet, és számítsd ki tengelymetszetének területét!

1009. Határozd meg egy olyan henger palástjának területét, melynek magassága 10 cm, az alaplapjának sugara pedig 2 cm!

1010. Egy henger palástjának kiterítése egy 4 cm és 5 cm oldalhosszúságú téglalap. Határozd meg a henger palástjának területét!

1011. Egy henger tengelymetszetének átlója 45°-os szöget zár be az alaplap síkjával. Mennyi a henger magasságának és az alaplap sugarának aránya?

1012. Egy henger sugara 5 m, tengelymetszetének átlója pedig 26 m. Számítsd ki: a) a henger magasságát; b) a tengelymetszet területét; c) a palást területét; d) a henger felszínét!

1013. Egy henger tengelymetszetének átlója 12 m és 60°-os szöget zár be az alaplappal. Határozd meg: a) a henger magasságát; b) a henger sugarát; c) a palást területét!

1014. Ábrázold a szabályos háromszög egyik oldala körüli forgatással keletkezett testet!

1015. Adott egy téglalap, melynek oldalai különböző hosszúságúak. Bizonyítsd be, hogyha ezt a téglalapot a különböző oldalai körül forgatjuk, akkor az így kapott testek palástjainak a területe egyenlő!

1016. Egy henger tengelymetszetének területe S. Mekkora a palást területe?

1017. Egy henger sugara r, magassága h. Határozd meg a tengelymetszet átlóját!

B

1018. Határozd meg a henger palástjának területét, ha a sugara r és az alkotója az alaplap középpontjából α szög alatt látszik!

1019. Határozd meg annak a hengernek a felszínét, melynek az átmérője d és ez az átmérő a másik alaplap középpontjából α szög alatt látszik!

1020. Egy hengert két síkkal metszettek, melyek hajlásszöge 30°. Az egyik sík illeszkedik henger tengelyére, a másik a henger alkotójára. Mekkora a síkmetszetek aránya?

1021. Bizonyítsd be, hogy a henger azon síkmetszete, amely átmegy az alkotón (nem érinti), téglalap!

1022. Egy henger magassága 16 cm, sugara 10 cm. Számítsd ki annak a síkmetszetnek a területét, amely párhuzamos a henger tengelyével és tőle 60 mm-re van!

1023. Egy henger sugara r, magassága h. Határozd meg az alaplapra merőleges síkmetszet területét, ha ez a sík az alaplapból 60°-os ívet metsz ki!

1024. Egy henger felszíne 50 cm^2, palástjának területe 30 cm^2. Számítsd ki a henger magasságát!

1025. Egy olyan négyzetet, melynek a területe Q, hengerré tekerték össze. Határozd meg e henger alaplapjának területét!

1026. A tórusz olyan test, ami akkor keletkezik, ha egy körvonalat forgatunk egy olyan egyenes körül, ami a körvonal síkjában van és nincs a körvonallal közös pontja. Készíts rajzot!

1027. Egy henger alakú konzervdoboz magassága 4 cm, alapjának sugara 6 cm. Hány ilyen doboz készíthető 15 000 m^2 alapanyagból, ha 10%-ot számítunk hulladékra?

1028. Egy henger alakú gőzkazán hossza 3,8 m, átmérője 0,8 m. Határozd meg a henger felszínére ható gőznyomást, ha 1 cm^2-re a gőz 10 kN erővel hat!

1029. Hány négyzetméter vaslemez szükséges egy 5 m hosszú, 20 cm átmérőjű ereszcsatorna elkészítéséhez, ha 3%-ot számolunk az illesztésekre (180. ábra)?



180. ábra

1030. Elegendő-e 8500 m^2 szigetelőszalag egy 1 kilométer hosszú, 1420 mm átmérőjű gázvezeték kétrétegű szigetelésére?

1031. Gyakorlati feladat. Készítsd el vastag papírból egy olyan henger hálóját, melynek a tengelymetszete egy 16 cm oldalhosszúságú négyzet!

Ismétlő feladatok

1032. Egy hasáb alaplapja olyan rombusz, melynek hegyesszöge 60°. Kisebb átlómetszetének területe S. Határozd meg a hasáb palástjának területét!

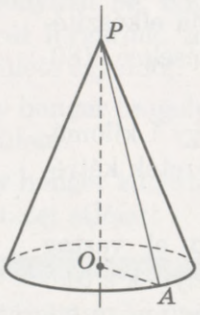
1033. Egy szabályos háromoldalú gúla magassága 12 cm, apotémája 13 cm. Számítsd ki a gúla felszínét!

1034. Egy gúla alaplapja olyan derékszögű háromszög, melynek a befogói 6 cm és 8 cm. Határozd meg a gúla palástjának területét, ha az alaplapok és oldallapok közötti összes lapszög γ!

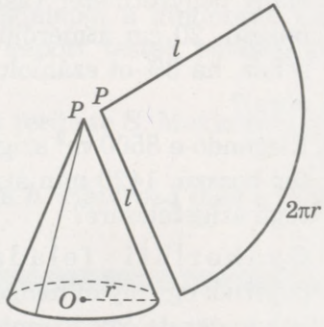
32. §. Kúp

A *kúp* olyan test, ami akkor keletkezik, ha egy derékszögű háromszöget forgatunk egyik befogója körül.

Ha egy OPA derékszögű háromszöget forgatunk a PO befogója örül, akkor a PA átfogó által súrolt felület a kúp palástja, az OA befogó pedig az alaplapot írja le (181. ábra). A P pontot a gúla *csúcsának*, a PO szakaszt a gúla *magasságának*, a PO egyenest a gúla *tengelyének* nevezzük. A gúla összes tengelymetszete egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög. A kúp tengelyére illeszkedő összes sík a kúp szimmetriasíkja. A kúpnak nincs szimmetriaközéppontja.



181. ábra



182. ábra

A kúp csúcsát az alaplap kerületének bármelyik pontjával összekötő szakaszt, a *kúp alkotójának* nevezzük. A kúp minden alkotója egyenlő hosszúságú. Ha a kúp palástját egyik alkotója mentén szétvágjuk, majd síkba kiterítjük, megkapjuk a kúp *hálóját*. Egy r sugarú és l alkotójú kúpot síkba kiterítünk, akkor egy l sugarú kör körcikkét kapjuk (182. ábra). Ennek a körcikknek az ívhossza $2\pi r$, területe pedig a *kúp palástjának a területe*. Ez a terület

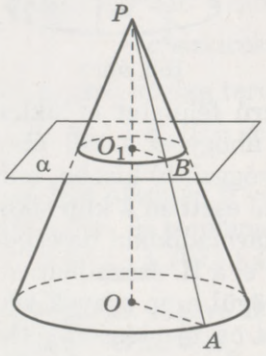
annyiszor kisebb az l sugarú körlap területénél, amennyivel a $2\pi r$ kisebb a $2\pi l$ szorzatnál. Ezért $S_p : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l$, innen következik $S_p = \pi rl$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a gúla felszínét, a palást területéhez hozzá kell adni az alaplap területét: $S_k = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

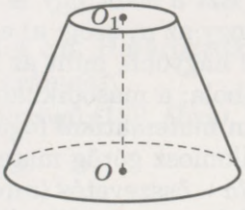
Tehát

$$S_k = \pi r(r + l).$$

Az alappal párhuzamos sík a kúpot egy körlapban metszi (183. ábra). Mivel a $POA\Delta \sim PO_1B\Delta$, ezért $OA : O_1B = PO : PO_1$, innen $\pi OA^2 : \pi O_1B^2 = PO^2 : PO_1^2$, vagyis *az alaplap területe és a vele párhuzamos síkmetszet területe úgy aránylik, mint a síkok és a gúla csúcsa közötti távolságok négyzetei.*



183. ábra



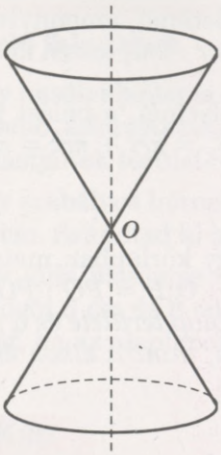
184. ábra

Az alappal párhuzamos szelősík a kúpot két forgástestre bontja: egy kisebb kúpra és egy *csonka kúpra*. A csonka kúp olyan térrész, amit két körlap, a csonka kúp alaplapjai, és a palást határol (184. ábra). Az alapok távolsága a csonka kúp magassága.

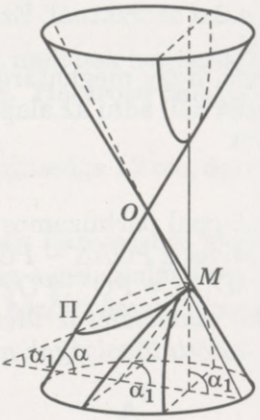
Megjegyzés. A csonka kúp nem kúp, mivel nem felel meg a kúp definíciójának. Ugyanígy a csonka gúla se gúla. Ezért nem helytálló az az állítás, hogy egy kúp (vagy gúla) lehet egész vagy csonka.

Kúp alakú a vízszintes felületre csurgatott homok, gabona, szén, sóder stb. A felsorolt anyagok mindegyikének megfelel egy adott szög, a *természetes meredekség*, az alkotó és az alaplap hajlásszöge. A homoknál ez körülbelül 30°, a szén esetében körülbelül 42°.

Nagy figyelmet kapnak a kúpszerű felületek síkmetszetei. A *kúpszerű felület*, (nem test) egy egyenes és az általa metszett egyenes körüli forgatással keletkezett felület. A kúpfelület végtelen és két egybevágó részből áll, melyek metszete, közös pontja az O pont (185. ábra).



185. ábra



186. ábra

Képzeljük el hogy egy ilyen kúpszerű felületet ω síkkal metszünk. Ezt a síkot úgy is fektethetjük, ahogy az a 186. ábrán látható, hogy az α_1 szög: a) egyenlő az α szöggel; b) kisebb, mint az α szög; c) nagyobb, mint az α szög! Az első esetben a kúp síkmetszete parabola; a másodikban ellipszis, a harmadikban hiperbola. Ezt a három matematikai fogalmat már Kr. e. a II. században bevezette Apollóniosz görög matematikus. Görögül ezen szavak jelentése: *parabola* – összevetés (mivel az első eset összevetéséből jöttek rá a másik két esetre), *ellipszis* – hiány (mivel az α_1 szög kisebb, mint az α szög), a harmadik esetben *hiperbola*, – többlet –, mivel az α_1 szög nagyobb, mint az α. Bár Apollóniosz nem az α_1 és α szögeket vizsgálta, hanem más mennyiségeket, viszont a feladatok lényegében e szögek vizsgálatára, összehasonlítására vezethetők vissza.

ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

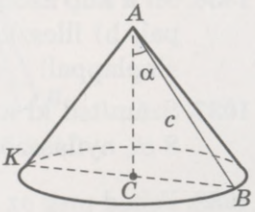
1. Mit nevezünk kúpnak?
2. Mi a kúp csúcsa, alaplapja, alkotója, tengelye, magassága?
3. Milyen mértani alakzat a kúp tengelymetszete? A kúp tengelyére merőleges síkmetszete?
4. Hogyan lehet egy kúpot síkba kiteríteni?
5. Hogyan lehet meghatározni a palást területét? A kúp felszínét?
6. Mi a csonka kúp? Kúp-e a csonka kúp?
7. Nevezd meg a csonka kúp elemeit!
8. Milyen mértani alakzat a csonka kúp tengelymetszete? És tengelyére merőleges síkmetszete?

Közös munka

1. Egy derékszögű háromszöget kisebbik befogója körül forgatunk. A háromszög átfogója c és a kisebbik befogóval α szöget zár be. Határozzuk meg az így nyert kúp: a) nagyobbik befogója által leírt körlap területét; b) a kúp tengelymetszetének területét!

● **Megoldás.** Legyen az ABC háromszögben $AC \perp BC$, $AB = c$, $CAB\angle = \alpha$ (187. ábra). Ennek a forgástestnek a tengelymetszete az ABK egyenlő szárú háromszög, melynek a magassága $AC = c\cos\alpha$, alapjának fele pedig $CB = c\sin\alpha$. Ezért a tengelymetszet területe

$$S_{ABK} = CB \cdot AC = c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha =$$
$$= c^2\sin\alpha\cos\alpha.$$



187. ábra

A CB sugarú körlap területe

$$S_{CB} = \pi CB^2 = \pi c^2\sin^2\alpha.$$

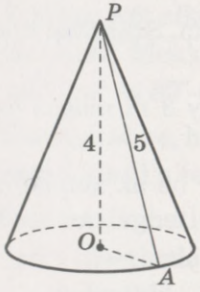
2. Egy kúp alkotója 5 cm, magassága 4 cm. Határozzuk meg a kúp felszínének és alaplapja területének arányát!

● **Megoldás.** A POA háromszög derékszögű (188. ábra). Ezért a kúp alaplapjának sugara $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

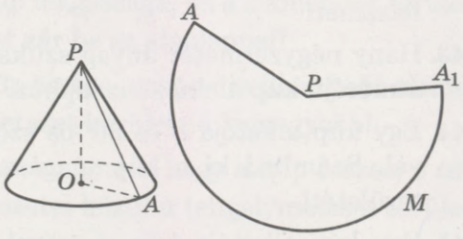
Az alaplap területe $S_a = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$;

A felszíne: $S_k = \pi \cdot 3(3 + 5) = 24\pi$.

Tehát $S_k : S_a = 24\pi : 9\pi = 8 : 3$.



188. ábra



189. ábra

3. Egy kúp magassága 4, alkotója 5. Mekkora az a körcikk, ami ennek a kúpnak a síkba kiterített palástja?

● **Megoldás.** A kúp alaplapjának sugara $OA = \sqrt{5^2 - 4^2}$ (189. ábra). Ezért az alaplap kerülete $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Ekkora az AMA_1 körcikk ívhossza is. Ez a hossz annyiszor kisebb a $PA = 5$ sugarú

körvonal hosszánál, ahányszor a körcikk keresett φ szöge kisebb a teljes szögnél, 360°-nál. Tehát $\varphi : 360° = 6\pi : 10\pi$, innen $\varphi = 216°$.

Felelet: 216°.

Szóbeli feladatok

1035. Hozz fel környezetedből példákat kúpra és csonka kúpra!

1036. Mi a kúp azon síkmetszete, amely: a) párhuzamos az alaplappal; b) illeszkedik a kúp csúcsára és adott szöget zár be az alaplappal!

1037. Számítsd ki a kúp tengelymetszetének területét, ha alkotója 8 m, nyílásszöge pedig: a) 90°; b) 30°!

1038. Fejtsd meg az alábbi képrejtvényt: ukrán szöveg $\frac{\text{СИ}}{\text{COS}}$.

A

1039. Egy kúp magassága 8 m, alaplapjának sugara 6 m. Számítsd ki a kúp alkotóját!

1040. Egy kúp tengelymetszete 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. Mekkora a kúp alaplapjának sugara és magassága?

1041. Egy kúp magassága egyenlő az alaplap sugarával. Határozd meg a kúp nyílásszögét!

1042. Egy kúp magassága 5 cm, magassága 4 cm. Számítsd ki a kúp felszínét!

1043. Hány négyzetméter anyag szükséges egy 3 m magas és 4 m átmérőjű kúp alakú sátorlaphoz?

1044. Egy kúp alkotója 8 és 30°-os szöget zár be az alaplap síkjával. Számítsd ki a kúp magasságát és tengelymetszetének területét!

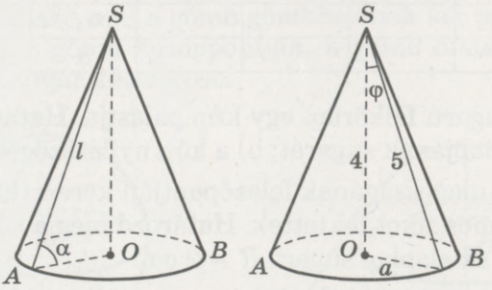
1045. Egy kúp alkotója l és α szöget zár be az alaplap síkjával. Határozd meg: a) a kúp magasságát; b) az alaplap sugarát; c) a tengelymetszet területét; d) a kúp felszínét!

1046. Határozd meg annak a kúpnak a felszínét, melynek tengelymetszete derékszögű háromszög és alaplapjának sugara R!

1047. Egy kúp alkotója és magassága között 2 cm a különbség, hajlásszögük pedig 60°. Határozd meg a kúp palástját!

1048. Számítsd ki a kúp tengelymetszetének területét, ha a palást területe 15π cm^2, a kúp felszíne pedig 24π cm^2!

1049. Alkoss a 190. ábra alapján minél több feladatot, és oldd meg!



190. ábra

B

1050. Határozd meg annak a kúpnak a felszínét, melynek a magassága 12 cm, a magasság talppontja és az alkotó felezőpontja közötti távolság pedig 6,5 cm!

1051. Egy kúp magassága 2 cm, alaplapjának sugara pedig 4 cm. Számítsd ki a kúp csúcsára illeszkedő síkmetszetének területét, ha a szelő sík az alaplapból 60°-os ívet metsz ki!

1052. Egy kúp két alkotóján keresztül, melyek hajlásszöge 60°, síkot fektettek. Mekkora a kúp magassága, ha a síkmetszet területe $4\sqrt{3}$ cm^2 és 30°-os szöget zár be az alaplappal?

1053. Bizonyítsd be, hogy a kúp összes, a csúcsára illeszkedő síkmetszetei közül a tengelymetszet kerülete a legnagyobb!

1054. Feladat haladóknak. Igaz-e, hogy a kúp összes, a csúcsára illeszkedő síkmetszetei közül a tengelymetszet területe a legnagyobb!

1055. Töltsd ki a következő táblázat üres celláit, ha C a körvonal hossza, d az alaplap átmérője, H a kúp magassága, l a kúp alkotója, α az alkotó és az alaplap hajlásszöge, S az alaplap területe, Q a tengelymetszet területe. Mielőtt hozzákezdenél a táblázat kitöltéséhez, készíts rajzot, és ismételd meg, írd le a szükséges képleteket!

№	C	d	H	l	α	S	Q
1	C		H				
2	C			l			
3		d			α		
4					α	S	
5					α		Q

1056. Egy R sugarú félkörlap egy kúp palástja. Határozd meg: a) a kúp alaplapjának sugarát; b) a kúp nyílásszögét!

1057. Egy kúp magasságának felezőpontján keresztül az alaplappal párhuzamos síkot fektettek. Határozd meg a síkmetszet területét, ha az alaplap sugara $R = 2$ cm!

1058. Egy kúp magassága h. A kúp csúcsától mekkora távolságra van az az alaplappal párhuzamos síkmetszet, melynek a területe kétszer kisebb az alaplap területénél?

1059. Egy kúp alaplapjának területe Q, palástjának területe pedig $2Q$. Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplap síkjával?

1060. Számítsd ki annak a forgástestnek a felszínét, amely egy 3 cm és 4 cm befogójú derékszögű háromszög forgatásával keletkezik, ha a háromszöget: a) a kisebbik befogója; b) nagyobbik befogója; c) átfogója körül forgatjuk!

1061. Határozd meg annak a forgástestnek a felszínét, amely egy egyenlő szárú a befogójú derékszögű háromszög forgatásával keletkezik, ha a háromszöget: a) a befogója; b) átfogója; c) a derékszög csúcsára illeszkedő, az átfogóval párhuzamos egyenes körül forgatjuk!

1062. Gyakorlati feladat. Készítsd el kemény papírból a kúp és a csonka kúp hálóját!

Ismétlő feladatok

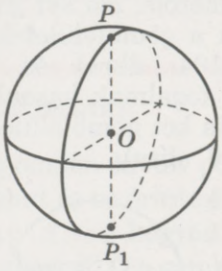
1063. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 8 cm, az alapélnél lévő lapszög 60°-os. Számítsd ki:
a) a gúla alapélét; b) a gúla felszínét!

1064. Egy henger tengelymetszete olyan téglalap, melynek a területe 48 cm^2. Az alaplap területe 36π cm^2. Számítsd ki a henger magasságát!

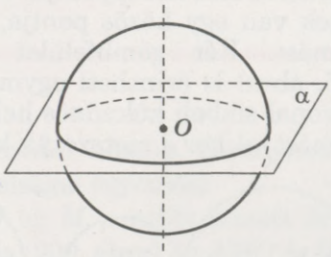
1065. Határozd meg az $A(2; 4; 6)$, $B(-2; 4; 6)$ és $C(2; 4; -6)$ csúcsú háromszög súlyvonalainak hosszát!

33. §. Gömb és gömbfelület

Gömbnek nevezzük azt a testet, amely egy körlap egyik átmérője körüli forgatásával keletkezik (191. ábra). Annak a körlapnak a középpontját, amelyet forgatunk, a gömb *középpontjának* nevezzük. Azt a szakaszt, ami a gömb gömbhéjának két pontját köti össze és átmegy a gömb középpontján, a gömb *átmérőjének* nevezzük. Hossza a sugár kétszerese.



191. ábra

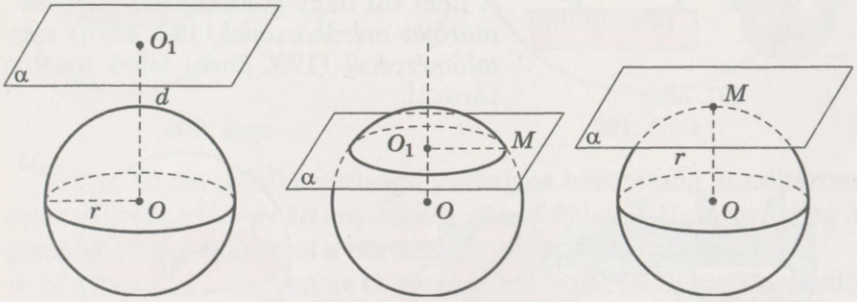


192. ábra

Minden olyan sík, amelyre illeszkedik a gömb középpontja, és a gömböt két egybevágó *félgömbre* osztja, a gömb szimmetriasíkja. Ennek a síknak és a gömbnek a síkmetszetét *főkörlapnak* nevezzük, a gömbhéjjal való metszetét *főkörnek* (192. ábra).

Milyen lehet egy gömb és egy sík kölcsönös helyzete a térben? Legyen a gömb középpontjának és a síknak a távolsága d, a gömb sugara pedig r. Három részeset lehetséges (193. ábra).

1. Ha $r < d$, akkor a gömbnek és a síknak nincs közös pontja (193. *a* ábra).



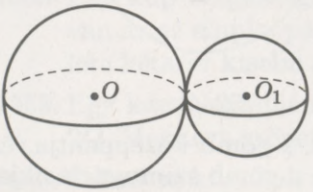
a) b) c)

193. ábra

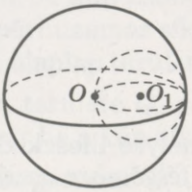
2. Ha $r > d$, akkor a sík és a gömb síkmetszete egy $O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}$ sugarú körlap. Ebből a képletből következik, hogy a metszet területe annál nagyobb, minél kisebb a d értéke (193. *b* ábra).

3. Ha $r = d$, akkor a gömbnek és a síknak egy közös pontja van (193. *c* ábra). Ebben az esetben a síkot *érintősíknak* nevezzük, a közös pontot *érintéspontnak*. Azt az egyenest, melynek a gömbbel csak egy közös pontja van, a *gömb érintőjének* nevezzük. A gömb érintője és érintősíkja is merőleges az érintéspontba húzott sugárra.

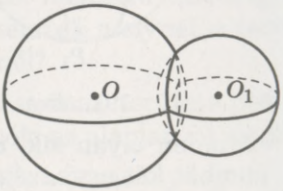
A gömb héját *gömbfelületnek* nevezzük. A gömbfelület síkmetszete körvonal. A gömb középpontja, sugara és átmérője a megfelelő gömbfelület középpontja, sugara és átmérője. Ha két gömbfelületnek van egy közös pontja, akkor ezek a gömbfelületek *érintik* egymást. Két gömbfelület kívülről (194. ábra) és belülről (195. ábra) is érintheti egymást. Ezek a fogalmak hasonlóak két körvonal síkbeli kölcsönös helyzetéhez. Ha két gömbfelület metszi egymást, akkor a metszetük körvonal (196. ábra).



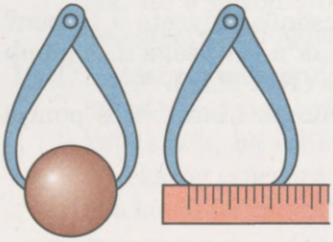
194. ábra



195. ábra

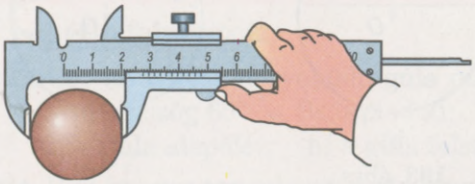


196. ábra

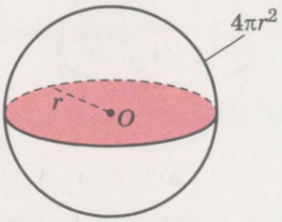


197. ábra

A mindennapi életben az alábbi gömbtestekkel találkozhatunk: csapágygolyó, súlygolyó (sportszer), csokoládé drazsé. Majdnem gömb alakú a Föld, a Hold, a Nap és más égitestek. A nem túl nagy gömb alakú testek átmérőjét *mérőkörzővel* (197. ábra) vagy *tolómércével* (198. ábra) lehet meghatározni.



198. ábra



199. ábra

Bebizonyítható, hogy a gömb felszíne 4-szer nagyobb, mint a főkör területe (199. ábra). Mivel egy r sugarú körlap területe πr^2, ezért az r sugarú gömb felszínét $4\pi r^2$ képlettel lehet kiszámítani.

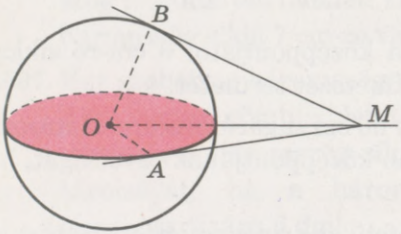
ELLENŐRIZD ÖNMAGAD!

1. Mi a gömb? Mi a gömbfelület? Nevezd meg az elemeiket!
2. Mi a gömb szimmetria síkja? Főköre?
3. Milyen alakzat a gömb síkmetszete?
4. Mi a gömb érintősíkja? Milyen tulajdonságokkal rendelkezik?
5. Mi a gömb érintője? Milyen tulajdonságokkal rendelkezik?
6. Milyen feltétel mellett érinti két gömbfelület egymást?
7. Hogyan határozható meg a gömbfelület felszíne?

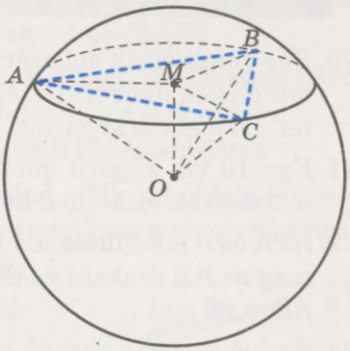
Közös munka

1. A gömbön kívüli pontból két érintőt húztak. Bizonyítsd be, hogy a pont és az érintési pontok távolságai egyenlők!

● **Megoldás.** Legyen MA és MN az M pontból húzott érintő adott szakaszai, O a gömb középpontja (200. ábra) Az AMO és BMO háromszögek egybevágók, a közös MO átfogó és egyenlő OA és OB befogóik alapján. Ezért $MA = MB$.



200. ábra



201. ábra

2. Egy 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög mindhárom csúcsa illeszkedik egy 10 cm sugarú gömbfelületre. Határozd meg a gömb középpontjának és a háromszög síkjának távolságát!

● **Megoldás.** Legyen az O középpontú gömbfelületre illeszkedő három pont A, B és C; $AB = BC = CA = OA = OB = OC$, OM a keresett távolság (201. ábra). Innen az OMA, OMB és OMC háromszögek egybevágók, közös a OM befogójuk és egyenlő hosszúságú átfogójuk alapján. Ezért

$$MA = MB = MC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Pitagorasz tételéből

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}.$$

Felelet: $OM = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm.

Szóbeli feladatok

1066. Hozz fel példákat a környezetedből gömbre vagy gömbfelületre!

1067. Határozd meg egy 2 m sugarú gömb főkörlapjának területét és főkörének kerületét!

1068. Egy gömb sugara 38 dm. Van-e ennek a gömbnek és a tőle 20 dm-re lévő síknak közös pontja?

1069. Az A és B pont illeszkedik egy 12 cm sugarú gömbfelületre. Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha ez a szakasz a gömb középpontjából 60°-os szög alatt látszik!

A

1070. Egy gömb egyik sugarának felezőpontján keresztül a sugárra merőleges síkot fektettek. Határozd meg a síkmetszet területét, ha a gömb sugara r!

1071. Egy 10 cm sugarú gömböt a középpontjától 6 cm-re síkkal metszették. Számítsd ki a síkmetszet területét!

1072. Az A és B pont illeszkedik egy 50 cm sugarú gömbre. Határozd meg az AB szakasz és a gömb középpontjának távolságát, ha $AB = 80$ cm!

1073. Egy R és egy r sugarú gömbfelület érinti egymást. Határozd meg a gömbfelület középpontjainak távolságát! Két esetet vizsgálj!

1074. Határozd meg azon r sugarú gömbfelületek középpontjainak mértani helyét, melyek: a) érintenek egy adott síkot; b) átmennek egy adott ponton!

1075. Határozd meg a 2 cm sugarú gömb felszínét!

1076. Határozd meg a 20 cm átmérőjű gömbfelület felszínét!

1077. Egy gömbfelület felszíne 3,14 dm^2. Mekkora a gömbfelület sugara?

1078. Egy 1 m sugarú körlap lefestéséhez 20 g festék szükséges. Mennyi festék kell egy 1 m átmérőjű gömb lefestéséhez?

1079. Határozd meg egy 10 cm sugarú félgömb felszínét!

1080. A gömb középpontjától 12 cm-re lévő síkmetszet területe 25π cm^2. Határozd meg a gömb felszínét!

1081. Egy gömb felszíne 400π cm^2. Számítsd ki a gömb középpontjától 6 cm-re lévő síkmetszet területét!

1082. Egy 2 dm átmérőjű gömb lefestéséhez 30 g festékre van szükség. Mennyi festék kell egy 6 dm átmérőjű gömb lefestéséhez?

1083. Egy kiállítóterem félgömb alakú. A gömbfelszín 392π m^2. Mekkora a padló átmérője?

1084. Egy félgömb görbefelületének a területe 20 cm^2-rel több alaplapjának területénél. Határozd meg az alaplap területét!

B

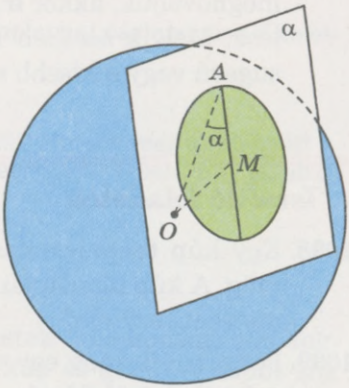
1085. Egy O középpontú gömb érintősíkjának M pontja a gömb középpontjától 25 cm-re van, az érintési ponttól pedig 15 cm-re. Számítsd ki: a) a gömb sugarát; b) a gömb sugarának felezőpontján átmenő síkmetszet területét!

1086. Egy gömb érinti a 3 cm és 4 cm befogójú derékszögű háromszög mindhárom oldalát! Határozd meg a gömb sugarát, ha a háromszög síkja 7 cm-re van a gömb középpontjától!

1087. Egy szabályos háromszögnek mind a három oldala érinti egy 2 dm sugarú gömbfelületet! Határozd meg a gömb középpontjának és a háromszög síkjának távolságát, ha a háromszög oldalhosszúsága 6 dm!

1088. Egy gömb sugara r. A sugár végpontján keresztül síkot fektettek, amely α szöget zár be a sugárral. Határozd meg a síkmetszet területét (202. ábra)!

1089. Az A pont egy 13 cm sugarú gömbfelület egyik pontja. Ez a pont az MN átmérő végpontjaitól 5 és 12 számokkal arányos távolságra van. Számítsd ki ezeket a távolságokat!



202. ábra

1090. Egy 30 cm és egy 40 cm sugarú körvonal egy 50 cm sugarú gömbfelület két párhuzamos körvonala. Határozd meg a körvonalak síkjai közötti távolságot!

1091. Adott egy 26 cm sugarú gömbfelület három pontja. A pontok távolsága 12 cm, 16 cm és 20 cm. Határozd meg a gömb középpontja és a három adott pont síkja közötti távolságot!

1092. A Föld sugara 6,4 ezer km. Mekkora utat tesznek meg Odessza, Lviv és Kijev a Föld forgásának következtében, ha ezen városok szélességi koordinátái megfelelően 46°29′, 49°49′ és 50°27′?

1093. A Föld sugara 6 400 km. Milyen távolságra kell a látóhatár fölé emelkedni ahhoz, hogy a látóhatár távolsága a megfigyelőtől 100 m-re legyen?

1094. Egy r sugarú gömb érinti egy lapszög mind a két lapját. Határozd meg a gömb középpontja és a lapszög éle közötti távolságot, ha a lapszög fokmértéke: a) 60°; b) 90°; c) 120°; d) α!

1095. Bizonyítsd be, hogy a gömbfelület felszínei úgy aránylanak, mint sugaraik négyzetei!

1096. Két gömbfelület sugarainak aránya 4 : 9. Határozd meg a nagyobb gömbfelület felszínét, ha a kisebbik felszíne 32 dm^2!

1097. Meglepő megoldás. Képzeld el, hogy két gömbre, az egyik olyan nagy mint a Föld, a másik olyan mint egy labda, főköre mentén gyűrűt húztak. Ha ezeket a gyűrűket 1 m-rel megnöveljük, akkor a gyűrű és gömb között bizonyos távolság lesz. Melyik esetben lesz ez a távolság nagyobb, a nagyobb sugarú vagy a kisebb sugarú gömbnél?

Ismétlő feladatok

1098. Egy kúp tengelymetszete egyenlő szárú derékszögű háromszög. A kúp alaplapjának kerülete 8π cm. Mekkora a tengelymetszet területe?

1099. Forgassunk meg egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget átfogója körül. Határozd meg az így keletkezett test felszínét, ha a háromszög átfogója 8 m!

1100. Határozd meg a kocka testátlóját, ha lapátlója d!

8. számú önálló munka

1. változat

1. Számítsd ki annak a kúpnak a felszínét, melynek az alkotója 8 cm, alaplapjának sugara pedig 5 cm!

2. Egy gömb átmérője 10 cm. Mekkora a felszíne?

3*. Forgassunk meg egy egyenlő szárú trapézt, melynek kisebbik alapja és szárai is 5 cm hosszúak, nagyobbik alapja körül. Határozd meg az így keletkezett test felszínét, ha a trapéz magassága 4 cm!

2. változat

1. Számítsd ki annak a hengernek a felszínét, melynek az alkotója 5 cm, alaplapjának sugara pedig 9 cm!

2. Egy gömb felszíne 100π cm^2. Mekkora az átmérője?

3*. Forgassunk meg egy derékszögű trapézt, melynek szárai és kisebbik alapja rendre 3 cm, 4 cm és 5 cm, nagyobbik alapja körül. Határozd meg az így keletkezett test felszínét!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

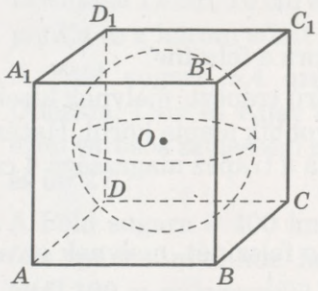
1. Hogyan lehet osztályozni a forgástesteket? Hozz fel példákat különböző forgástestekre!
2. Definiáld a hengert! Nevezd meg az elemeit!
3. Hogyan kell meghatározni a henger felszínét!
4. Definiáld a kúpot! Nevezd meg az elemeit!
5. Hogyan kell meghatározni a kúp felszínét!
6. Milyen a kúp alaplapja területének és alaplappal párhuzamos síkmetszet területének aránya?
7. Mi a kúpszerű felület?
8. Milyen alakzat lehet a kúp síkmetszete?
9. Add meg a gömb; a gömbfelület definícióját! Nevezd meg az elemeit!
10. Milyen lehet két gömbfelület kölcsönös helyzete a térben? Egy gömb és egy sík kölcsönös helyzete?

34. §. Testek kombinációja

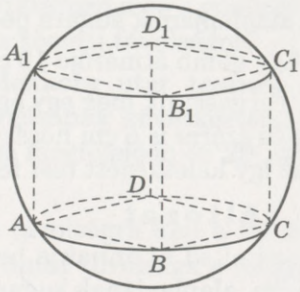
Eddig az olyan egyszerű mértani testek tulajdonságaival foglalkoztunk mint a hasáb, gúla, henger, kúp és gömb. Viszont sok esetben bonyolultabb testekkel van a szakembereknek dolguk, a felsorolt testek egyesítésével, *kombinációjával*.

A különböző testek kombináció közül különös figyelmet kapnak a *beírt* és a *körülírt testek*.

Például egy *gömb soklapba írt*, ha érinti a soklap minden lapját. A *soklap gömbbe írt*, ha minden csúcsa illeszkedik a gömbfelületre. A 203. ábrán egy kockába írt gömb látható, a 204-en egy gömbbe írt kocka.



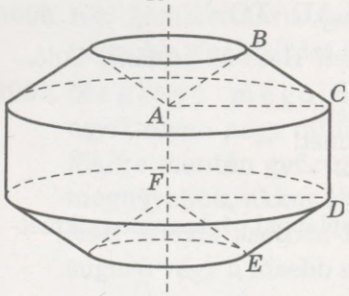
203. ábra



204. ábra

Egy hasáb *hengerbe írt*, ha alaplapja a henger alapjába írt sokszög. A henger *hasábba írt*, ha alaplapja a hasáb alaplapjának beírt köre. A gúla *kúpba* írt, ha közös a csúcsuk, és a gúla alaplapja pedig a kúp alaplapjába írt sokszög. A *kúp gúlába* írt, ha közös a csúcsuk és a kúp alaplapja érinti a gúla alaplapjának minden oldalát.

Ha az egyik test a másik testbe van írva, akkor a második test az első test köré van *írva*.



205. ábra

Ugyanúgy, ahogy találkozhatunk a henger, kúp és csonka kúp kombinációjával, vizsgálhatjuk különböző sokszögek forgatásával keletkezett testeket is. Például, ha egy szabályos hatszöget egyik oldala körül forgattunk, akkor a kapott test egy henger és két olyan csonka kúp egyesítése, melyből egy kúpot vettek ki (205. ábra).

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Mikor mondhatjuk, hogy a sokszögbe gömb van írva?
2. Mikor mondhatjuk, hogy a sokszög gömbbe van írva?
3. Definiáld a hengerbe írt hasábot!
4. Definiáld a kúpba írt gúlát!
5. Lehet-e minden szabályos sokszög köré gömböt írni?

Közös munka

1. Egy kúp l alkotója α szöget zár be az alaplap síkjával. A kúpba kockát írtak úgy, hogy négy csúcsa az alaplapban van, négy csúcsa pedig a palástón. Mekkora a kocka éle?

● **Megoldás.** Legyen a kúp egyik alkotója PM, melyre illeszkedik a beírt kocka A_1 csúcsa (206. ábra). A kocka A csúcsa az alaplap OM sugarán van. A feladat feltételei alapján $PM = l$, $PMO\angle = \alpha$. Ha a kocka éle x, akkor $OA = \frac{x}{\sqrt{2}}$. A POM derékszögű háromszögből kapjuk, hogy:

$$OM = PM \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha,$$

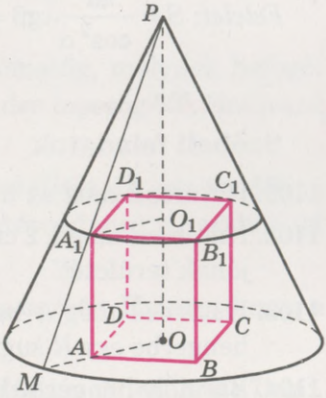
$$MA = MO - OA = l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Mivel $\frac{A_1A}{MA} = \operatorname{tg}\alpha$, így

$$\frac{x}{l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

innen $x = \frac{\sqrt{2}\,l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.

Felelet: $x = \frac{\sqrt{2}\,l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.



206. ábra

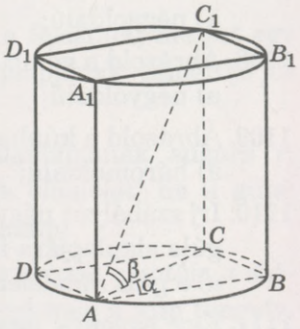
2. Egy egyenes hasáb alaplapja olyan téglalap, melynek egyik oldala a, és ez az oldal α szöget zár be az alaplap átlójával. A hasáb átlója β szöget zár be az alaplappal. Határozzuk meg a hasáb köré írt henger palástjának területét, ha $a = 6$ cm, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

● **Megoldás.** Adott egy derékszögű paralelepipedon (207. ábra). Ezért, ha $AB = a$, akkor $BAC\angle = \alpha$, $CAC_1\angle = \beta$, CC_1 a körülírt henger magassága, AC az alaplap átmérője.

A henger palástjának területét az

$$S = 2\pi rh$$

képlettel határozzuk meg, ahol $r = \frac{AC}{2}$, $h = CC_1$.



207. ábra

Mivel az ABC és az ACC_1 háromszögek derékszögűek, ezért

$$AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha};\ CC_1 = AC\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta.$$

Tehát,

$$S = 2\pi\frac{a}{2\cos\alpha}\cdot\frac{a}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta = \frac{\pi a^2}{\cos^2\alpha}\operatorname{tg}\beta.$$

Mivel $a = 6$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, ezért

$$S = \frac{\pi 6^2\cdot 4}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Felelet: $S = \frac{\pi a^2}{\cos^2\alpha}\operatorname{tg}\beta = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^2.

Szóbeli feladatok

1101. Határozd meg az a élhosszúságú kockába írt gömb sugarát!

1102. Határozd meg a 2 cm élhosszúságú kockába írt henger palástjának területét!

1103. Határozd meg a henger tengelymetszetének területét, ha a hengerbe egy R sugarú gömb van írva!

1104. Bármely hengerbe írható gömb?

1105. Mekkora a magassága annak a csonka kúpnak, melybe egy R sugarú gömb van írva?

1106. Határozd meg a 8 cm sugarú gömbfelületbe írt kocka átlóját!

A

1107. Ábrázold a gömb köré írt szabályos hasábot, ha a hasáb:
a) négyoldalú; b) háromoldalú!

1108. Ábrázold a gömb köré írt szabályos gúlát, ha a gúla:
a) négyoldalú; b) háromoldalú!

1109. Ábrázold a kúpba írt szabályos gúlát, ha a gúla:
a) háromoldalú; b) négyoldalú; c) hatoldalú!

1110. Írj szabályos négyoldalú gúlába kockát úgy, hogy egyik lapja a gúla alaplapjára illeszkedik, a szemben lévő lap csúcsai pedig:
a) a gúla oldaléleire; b) a gúla apofémáira!

1111. Egy egyenes hasáb alaplapja derékszögű háromszög. Írj a hasáb köré: a) hengert; b) gömböt!

1112. Határozd meg a 3 dm, 4 dm és 5 dm méretű téglatest köré írt gömb átmérőjét!

1113. Határozd meg a 10 cm élhosszúságú kockába írt gömb felszínét!

1114. Határozd meg adott kocka köré írt és beleírt gömbök felszíneinek arányát!

B

1115. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle a, oldaléle pedig α szöget zár be az alaplappal. Határozd meg a gúla köré írt kúp palástjának területét!

1116. Egy gúla alaplapja derékszögű háromszög, melynek befogói 10 m és 24 m. Az alapéleknél lévő minden lapszög 60°. Határozd meg ebbe a gúlába írt kúp felszínét!

1117. Egy szabályos négyoldalú hasáb testátlója 10 cm és 45°-os szöget zár be az alaplap síkjával. Határozd meg a hasábba írt henger palástjának területét!

1118. Egy háromoldalú hasáb minden éle a egység. Határozd meg a hasáb köré írt henger felszínét!

1119. Egy szabályos háromoldalú hasáb palástjának területe 27 cm^2. Számítsd ki a hasábba írt henger palástjának területét!

1120. Egy egyenes hasáb alaplapjának átlói 6 cm és 8 cm. A hasábba gömb írható. Határozd meg a hasáb felszínét!

1121. Egy szabályos hatoldalú hasáb köré, melynek magassága 12 cm, 10 cm sugarú gömbfelületet írtak. Számítsd ki a hasáb palástjának területét!

1122. Számítsd ki annak a gömbfelületnek a felszínét, melyet egy henger köré írtak, ha a henger alaplapjának átmérője és magassága rendre 4 cm és 3 cm!

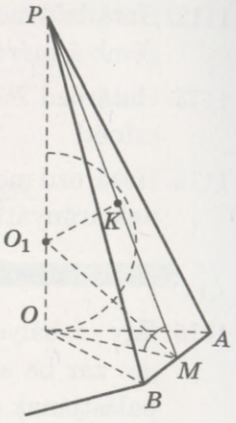
1123. Egy kúp palástjának területe Q, alaplapjának sugara r. Határozd meg ebbe a kúpba írt gúla oldalélet, ha a gúla: a) háromoldalú; b) négyoldalú; c) hatoldalú!

1124. Egy r sugarú gömb köré kúpot írtak, melynek alkotója α szöget zár be az alaplap síkjával. Határozd meg a kúp tengelymetszetének területét, ha $r = 2$ m, $\alpha = 50°$!

1125. Egy szabályos oktaéder éle a egység. Határozd meg: a) az oktaéderbe; b) az oktaéder köré írt gömb sugarát!

1126*. Határozd meg a szabályos n-oldalú gúlába írt gömb sugarát (208. ábra), ha a gúla alapéle a, és az alapéleknél lévő lapszög α, ha: a) $n = 4$; b) $n = 6$; c) $n = 3$; d) $n = m$!

1127*. Egy r sugarú gömbbe szabályos négyoldalú gúlát írtak, melynek oldaléle α szöget zár be az alaplap síkjával. Határozd meg a gúla magasságát!



208. ábra

Ismétlő feladatok

1128. Egy henger alaplapja területének és tengelymetszete területének az aránya $\pi : 4$. Határozd meg a henger tengelymetszete átlóinak hajlásszögét!

1129. A henger tengelyével párhuzamos, tőle 2 cm-re lévő síkmetszete négyzet. Mekkora a metszet területe, ha az alaplap sugara $\sqrt{6}$ cm?

1130. Határozd meg annak a kockának a testátlóját, melynek a lapátlója d hosszúságú?

35. §. A hasáb és a henger térfogata

Minden test a tér bizonyos részét foglalja el: a tégla kisebbet, egy épület nagyobbat; az 1 cm élhosszúságú kocka kisebbet, a 2 cm élhosszúságú nagyobbat. Ahhoz, hogy összehasonlítsuk a tér különböző részeit, be kell vezetni a *térfogat* fogalmát.

A térfogat fogalmának szigorú értelmezése nehézkes. Mi csak az egyszerű testek, mint a soklapok, henger, kúp és gömb térfogatának vizsgálatára szorítkozunk. Ezen testek térfogata olyan mennyiség, amely meghatározott tulajdonsággal bír (a térfogat tulajdonságai).

1. *Minden testnek van térfogata, amely egy pozitív számmal jellemezhető.*

2. *Ha egy testet néhány részre feldarabolunk, akkor a test térfogata egyenlő e részek térfogatainak összegével.*

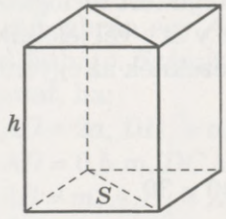
3. *Egybevágó testek térfogata egyenlő.*

4. *Az egységkocka térfogata a térfogat mértékegysége.* Egységkockának az olyan kockát nevezzük, amelynek élei egységnyiek.

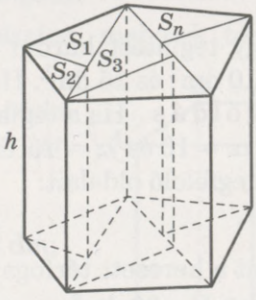
A *térfogat* egy mennyiség, ugyanúgy, mint a hossz, az ívhossz, a terület. A térfogatot nemcsak egy számmal jellemezzük, hanem mértékegységgel is. Például 1 dm^3 felírható, mint 1000 cm^3 és mint 0,001 m^3. A hosszmérésnél a mértékegységnek bizonyos (egységnyi) szakasz hosszát alkalmazzák. Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területét fogadták el területegységnek, az egységnyi élhosszúságú kocka térfogata a térfogatmérés mértékegysége.

A testek térfogatát vagy megmérik, vagy kiszámolják. Például egy veder térfogata megmérhető, ha a választott mértékegységnek megfelelő edénnyel megtöltjük vízzel. Érthető, hogy ezzel az eljárással csak közelítő értéket kaphatunk. A testek térfogatának pontos értékét képletekkel lehet meghatározni. Nézzünk meg néhányat.

Számotokra már ismeretes, hogy a derékszögű paralelepipedon térfogata az alaplap területének és magasságának szorzatával egyenlő. De hogyan lehet egy hasáb térfogatát meghatározni? Ha a hasáb olyan egyenes hasáb, melynek alaplapja derékszögű háromszög, akkor két ilyen hasábból egy derékszögű paralelepipedon alkotható (209. ábra). Ha a háromoldalú hasáb magassága, alaplapjának területe és térfogata rendre h, S és V, akkor a téglatest magassága alaplapjának területe és térfogata megfelelően h, $2S$ és $2V$. Mivel a derékszögű paralelepipedon térfogata alaplapja területének és magasságának szorzata, így $2V = 2S \cdot h$, innen $V = S \cdot h$.



209. ábra



210. ábra

Tehát minden olyan hasábnak a térfogata, melynek alaplapja derékszögű háromszög, alaplapja területének és magasságának szorzatával egyenlő.

Vegyünk egy tetszőleges egyenes hasábot. Alaplapjának területe legyen S, magassága h, térfogata V. Az alaplapot fel lehet darabolni n derékszögű háromszögre (210. ábra), tehát a hasábot n olyan hasábra, melynek az alaplapja derékszögű háromszög. Ha a hasábok alaplapjainak területét és térfogatát rendre S_1 és V_1, S_2 és V_2, …, S_n és V_n-nel jelöljük, akkor

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = S_1h + S_2h + \ldots + S_nh =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)h = Sh.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy bármely *egyenes hasáb térfogata az alaplap területének és magasságának szorzatával egyenlő.*

A hengerre tekinthetünk úgy is, mint olyan n oldalú hasábra, ahol n értéke nagyon nagy. Például, ha n értéke egy milliárd, akkor a hasábot már meg sem lehet különböztetni egy hengertől. Tehát az eddigi bizonyítás alapján az ilyen hasáb térfogata is az alaplap területének és magasságának a szorzatával egyenlő. Így *a henger térfogata is az alaplap területének és magasságának a szorzatával egyenlő.* Mivel az r sugarú körlap területe πr^2, ezért az r sugarú és h magasságú henger térfogatát az alábbi képlettel lehet meghatározni:

$$V = \pi r^2 h.$$

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Sorold fel a térfogat tulajdonságait!
2. Milyen térfogategységeket ismersz?
3. Hogyan lehet térfogatot mérni?
4. Mivel egyenlő az a élhosszúságú kocka térfogata?
5. Hogyan határozható meg a hasáb térfogata?
6. Hogyan határozható meg a henger térfogata?

Közös munka

1. Egy téglatest három egymástól különböző lapjának területe 6 dm^2, 10 dm^2 és 15 dm^2. Határozd meg a téglatest térfogatát!

● **Megoldás.** Ha a téglatest méreteit x, y és z-vel jelöljük, akkor $xy = 6$, $xz = 10$ és $yz = 15$. Szorozzuk meg ezeknek az egyenlőségeknek a megfelelő oldalait:

$$x^2y^2z^2 = 900.$$

Tehát a keresett térfogat $V = xyz = \sqrt{900} = 30$.

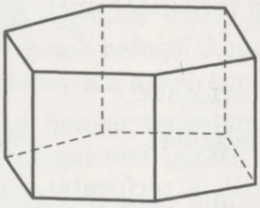
Felelet: $V = 30$ dm^2.

2. Határozd meg annak a szabályos hatoldalú hasábnak a térfogatát, melynek minden éle a!

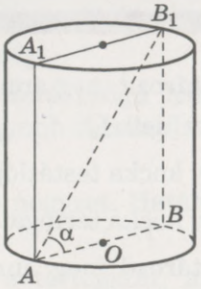
● **Megoldás.** Ennek a hasábnak a magassága a (211. ábra). Alaplapja hat szabályos háromszögre darabolható, melyek mindegyikének területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ezért a keresett térfogat $V = Sh = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = 1{,}5\sqrt{3}a^3$.

3. Egy henger tengelymetszetének átlója d egység hosszú, és α szöget zár be az alaplappal. Határozd meg a henger térfogatát!



211. ábra



212. ábra

● **Megoldás.** Legyen ABB_1A_1 a henger tengelymetszete, AB_1 a metszet átlója, $B_1AB\angle = \alpha$ (212. ábra). Az ABB_1 háromszög derékszögű, ezért a henger magassága $BB_1 = d\sin\alpha$, az alaplap átmérője pedig $AB = d\cos\alpha$. Az alaplap sugara $OA = 0{,}5d\cos\alpha$. Így a henger keresett térfogata

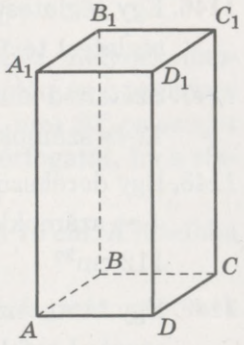
$$V = \pi \cdot OA^2 \cdot AB = \pi \cdot 0{,}25d^2\cos^2\alpha \cdot d\sin\alpha = 0{,}25\pi\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Szóbeli feladatok

1131. Egy kocka éle 5 cm. Mekkora a térfogata?

1132. Mekkora annak a kockának a felszíne, melynek térfogata 27 cm^3?

1133. A 213. ábrán egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest látható. Számítsd ki a téglatest térfogatát, ha:
a) $AD = 2a$, $DD_1 = a$, $DC = 3a$;
b) $AD = 0{,}5$ m, $DC = 4$ dm, $CC_1 = 3$ dm;
c) $AB = m$, $A_1D_1 = 2m$, $CC_1 = 0{,}5m$;
d) $S_{ABCD} = Q$, $CC_1 = 3$!



213. ábra

1134. Egy 1×2×4 méretű téglatest alakú gyurmából kockát készítettek. Mekkora ennek a kockának az éle?

1135. Hány darab 1 dm élű kockát lehet egy 3×4×5 méretű dobozba rakni?

1136. Hogyan változik meg a téglatest térfogata, ha minden élét 3-szorosára növeljük?

1137. Egy szabályos négyoldalú hasáb térfogata 14 cm^3. Ezt a hasábot két egymásra kölcsönösen merőleges átlós síkmetszettel hasábokra darabolták. Mekkora az így kapott testek térfogata?

A

1138. Határozd meg annak a kockának a térfogatát, mely lapjának a területe Q!

1139. Egy kocka testátlója d. Mekkora a térfogata?

1140. Egy kocka térfogata V. Mekkora a felszíne?

1141. Határozd meg annak a téglatestnek a térfogatát, melynek alapélei 6 cm és 8 cm, és a testátlója 45°-os szöget zár be az alaplap síkjával?

1142. Határozd meg annak a téglatestnek a térfogatát, melynek alapélei 3 cm és 4 cm, és átlós metszetének területe 30 cm^2.

1143. Számítsd ki a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, ha alaplapjának területe 49 cm^2, oldallapjának területe pedig 56 cm^2!

1144. Egy szabályos négyoldalú gúla testátlója 8 cm és 30°-os szöget zár be az alaplap síkjával. Mekkora a hasáb térfogata?

1145. Három ólomkockát, melyek élei rendre 1 cm, 6 cm és 8 cm egy kockává olvasztottak össze. Számítsd ki a kapott kocka élét!

1146. Egy téglatest méretei 15 m, 36 m és 50 m. Határozd meg a téglatest térfogatával azonos térfogatú kocka élét!

1147. Számítsd ki a téglatest térfogatát, ha élei arányosak a 3, 4 és 12-es számokkal, testátlója pedig 39 cm!

1148. Egy derékszögű paralelepipedon méretei arányosak az 1, 2 és 4-es számokkal. Mekkora a téglatest térfogata, ha a felszíne 112 cm^2?

1149. Egy tanteremben minden tanulóra legalább 6 m^3 levegő szükséges. Legfeljebb hány tanuló foglalkozhat egy 10×6×3,5 m méretű tanteremben?

1150. Egy egyenes hasáb alaplapja olyan derékszögű háromszög, melynek befogói 2 cm és 5 cm. Határozd meg a hasáb térfogatát, ha magassága 3 cm!

1151. Számítsd ki annak a hengernek a térfogatát, melynek sugara 2 cm, magassága pedig 5 cm!

1152. Határozd meg annak a szabályos háromoldalú hasábnak a térfogatát, melynek minden éle a egység!

1153. Egy egyenes hasáb alaplapja olyan derékszögű háromszög, melynek befogói 3 cm és 4cm. Legnagyobb oldallapja négyzet. Mekkora a hasáb térfogata?

1154. Egy henger tengelymetszete a oldalú négyzet. Határozd meg a henger térfogatát!

1155. Határozd meg annak a hengernek a térfogatát, melybe R sugarú gömb írható!

1156. Egy a oldalú négyzetet egyik oldalegyenese körül forgatnak. Mekkora az így keletkezett test térfogata?

B

1157. Egy szabályos háromoldalú hasáb lapátlója d és α szöget zár be a hasáb alapélével. Határozd meg a hasáb térfogatát!

1158. Egy háromoldalú egyenes hasáb alapélei 10 cm, 10 cm és 6 cm. Számítsd ki a hasáb térfogatát, ha legnagyobb oldalapjának kerülete 48 cm!

1159. Egy egyenes hasáb alapja a oldalú rombusz, melynek hegyesszöge 60°. Határozd meg a hasáb térfogatát, ha a kisebbik testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal!

1160. Egy hasáb alaplapja olyan egyenlő szárú trapéz, melynek alapjai 6 cm és 10 cm. A trapéz nagyobbik alapján és a szemben fekvő oldalél felezőpontján síkot fektettek, ami 30°-os szöget zár be az alaplappal. Számítsd ki a hasáb térfogatát, ha a síkmetszet területe 48 cm^2!

1161. Egy egyenes hasáb alapélei 13 cm, 14 cm és 15 cm. A hasábba gömböt írtak. Mekkora a hasáb térfogata?

1162. Határozd meg annak a téglatestnek a térfogatát, melynek alapéle a, beírt gömbjének sugara r!

1163. Egy vasúti töltés keresztmetszete olyan trapéz, melynek alapjai 18 m és 8 m, magassága pedig 3 m. Mekkora a térfogata 1 km hosszú ilyen töltésnek?

1164. Két henger alakú oszlop magassága azonos, sugaraik aránya pedig 2 : 3. Mekkora az oszlopok térfogatainak aránya?

1165. Határozd meg, mekkora területű körlap alakú olajfolt képződik a tengeren 1 m^3 olajból, ha az olajréteg vastagsága 1 mm!

1166. Egy henger alakú edénybe egy alkatrészt tettek. Az edény belső átmérője 20 cm. Az edényben lévő folyadék magassága 12 cm-t emelkedett. Határozd meg az alkatrész térfogatát!

1167. Hány négyzetméter papír van abban a tekercsben, melynek a magassága 85 cm, sugarai pedig 45 cm és 2 cm? A papír vastagsága 0,1 mm.

Ismétlő feladatok

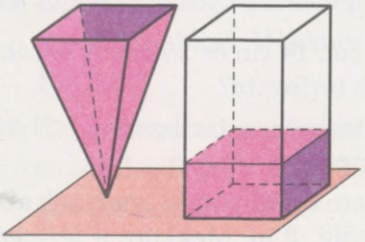
1168. Határozd meg annak a testnek a felszínét, melyet egy 13 cm, 14 cm és 15 cm oldalhosszúságú háromszög 14 cm-es oldala körüli forgatásával kapunk!

1169. Határozd meg a henger magasságát, ha az alaplapjának átmérője d és a felső alaplap középpontjából α szög alatt látszik!

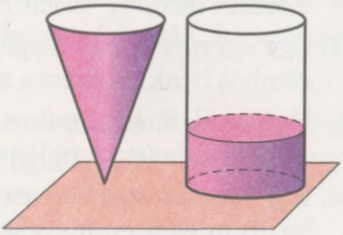
1170. Határozd meg annak a szabályos háromoldalú gúlának a felszínét, melynek az apotémája l és α szöget zár be az alaplappal!

36. §. A gúla, a kúp és a gömb térfogata

A gúla, a kúp és a gömb térfogatának képletét kísérleti úton lehet meghatározni. Ha egy gúlából a homokot áttöltjük egy vele azonos magasságú és alaplapú hasábba (214. ábra), vagy egy kúpból egy azonos magasságú és alaplapú hengerbe (215. ábra), könnyen megállapítható, hogy a gúla térfogata háromszor kisebb a hasáb térfogatánál, és a kúp térfogata háromszor kisebb a henger térfogatánál. Tehát *a gúla vagy a kúp térfogata egyenlő az alaplap területének és magassága szorzatának harmadával.*



214. ábra



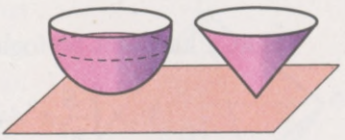
215. ábra

Tehát egy r sugarú és h magasságú kúp térfogata $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Hasonlóképpen megállapítható, hogy egy r sugarú félgömb térfogata kétszerese egy olyan kúp térfogatának, melynek sugara és

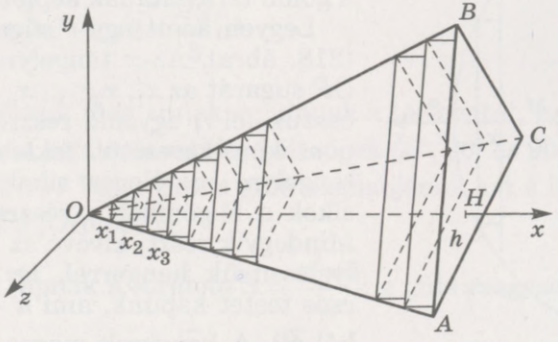
magassága is r (216. ábra). Mivel egy ilyen kúp térfogata $\frac{1}{3}\pi r^3$, így az r sugarú gömb térfogatát a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ képlettel lehet meghatározni.

Érthető, hogy ezek az okfejtések nem bizonyítások. Ezen képletek integrállal bizonyíthatók. Felvázoljuk ezeknek a bizonyításoknak az általános menetét.



216. ábra

Legyen adott egy tetszőleges $OABC$ gúla (217. ábra). Helyezzük a gúlát koordináta-rendszerbe úgy, hogy a gúla O csúcsa illeszkedjen az origóra, OH magassága pedig az x tengely irányában.



217. ábra

Az x_1, x_2, ..., x_{n-1} pontokkal osszuk fel a gúla h magasságát n egyenlő részre. Ha ezeken a pontokon át az x tengelyre merőleges síkokat fektetünk, akkor ezek a síkok a gúlát n részre bontják. Az egyik ilyen rész egy kis gúla, a többi pedig csonka gúla. Helyettesítsük ezeket a gúlákat olyan egyenes hasábokkal, melyek alaplapja a csonka gúla kisebbik alaplapja, magassága egyenlő a csonka gúla magasságával. Egy, a gúlába írt lépcsős testek kaptunk, ami $n - 1$ hasábból áll. A hasábok mindegyikének $\delta = \frac{h}{n}$ a magassága, alaplapjai az x argumentum függvényei: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{n-1})$. A kapott lépcsős test térfogata V_n egyenlő az n –1 darab hasáb térfogatainak összegével:

$$V_n = f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + \ldots + f(x_{n-1})\delta.$$

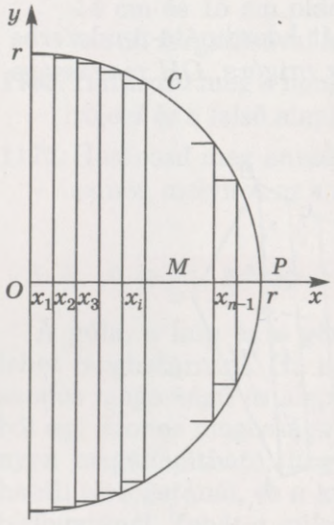
Ez egy integrálösszeg. Ebben az esetben az $f(x)$ függvény az x tengelyre merőleges, az O ponttól x egységre lévő síkmetszet területe.

Ahogy a 226. oldalon igazoltuk $f(x) : S = x^2 : h^2$, innen

$$f(x) = \frac{S}{h^2}x^2.$$

Tehát a keresett térfogat:

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{Sh^3}{3h^2} = \frac{1}{3}Sh.$$



218. ábra

Ugyanígy, ha a „gúla" szót a „kúp" szóra cseréljük, bizonyítható, hogy a kúp térfogata egyenlő alaplapja területének és magassága szorzatának harmadával. Hasonlóképpen bizonyítható a gömb térfogatának képlete is.

Legyen adott egy r sugarú félgömb (218. ábra). Az x tengelyre illeszkedő OP sugarát az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pontokkal osszuk fel n egyenlő részre. Az osztópontokon keresztül fektessünk az x tengelyre merőleges síkokat. Ezek a síkok a félgömböt n részre osztották. Mindegyik részt, kivéve az utolsót, helyettesítsük hengerrel, így olyan lépcsős testet kapunk, ami $n - 1$ hengerből áll. A hengerek magassága $\delta = \frac{r}{n}$, alaplapjuk területe az x argumentum függvényei: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{n-1})$.

Így a gömbbe írt lépcsős test térfogata $f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + f(x_3)\delta + \ldots + f(x_{n-1})\delta$.

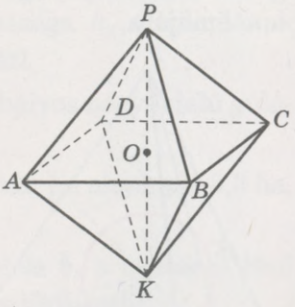
Ez egy integrálösszeg. Az $f(x_i)$ függvény az x tengelyre merőleges, x_i pontra illeszkedő síkmetszet területe. Ha a gömbfelület C pontjának x_i az abszcisszája, akkor $f(x_i)$ a CM sugarú körlap területe. Az OCM derékszögű háromszögből $CM^2 = r^2 - x_i^2$. Ezért $f(x_i) = \pi(r^2 - x_i^2)$, innen az r sugarú félgömb térfogata

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx = \left(\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Az r sugarú gömb térfogata ennek a duplája, ezért $V_g = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Közös munka

1. Határozzuk meg a szabályos oktaéder térfogatát, ha éle a egység hosszú!



219. ábra

● **Megoldás.** A $PABCDK$ szabályos oktaéder két szabályos négyoldalú gúla egyesítése: $PABCD$ és $KABCD$ (219. ábra). Közös alapjuk az $ABCD$ négyzet, melynek területe $S = a^2$; mivel PK az $APCK$ négyzet átlója, ezért $PK = a\sqrt{2}$. Így a keresett térfogat

$$V = \frac{1}{3}S \cdot PO + \frac{1}{3}S \cdot KO = \frac{1}{3}S \cdot PK =$$

$$= \frac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

2. Határozzuk meg annak a gúlának a térfogatát, melynek minden oldaléle a, és a csúcsnál lévő élszögek 60°, 90° és 90°!

● **Megoldás.** Válasszuk a gúla alaplapjának azt a lapját, amely egyenlő szárú háromszög.

Ennek a lapnak a területe $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a gúla magassága a. Így a gúla térfogata $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Felelet: $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

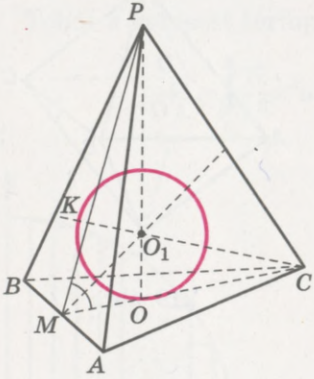
3. Bizonyítsuk be, hogyha az r sugarú gömb köré írt soklap felszíne S, akkor a térfogata $V = \frac{1}{3}Sr$!

● **Megoldás.** Kössük össze az n-lap minden csúcsát a gömb középpontjával, így n gúlát kapunk. Minden gúla magassága r, alaplapjuk területe egyenlő a soklap megfelelő lapjainak területével. Ezért ha a soklap lapjainak területei S_1, S_2, ..., S_n, akkor a soklap térfogata

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \ldots + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}Sr.$$

4. Határozzuk meg a szabályos háromoldalú gúlába írt gömb térfogatát, ha a gúla alapéle a, és az alapéleknél lévő lapszögek α!

● **Megoldás.** A $PABC$ szabályos háromoldalú gúlába írt gömb O_1 középpontja illeszkedik a gúla PO magasságára (220. ábra). A gömb a PAB lapot egy K pontban érinti, ami illeszkedik a gúla PM apotémájára.



220. ábra

Ha $AB = a$, akkor

$$OM = \frac{1}{3}MC = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Mivel $O_1OM\triangle = O_1KM\triangle$, ezért

$$O_1MO\angle = \frac{1}{2}PMO\angle = \frac{\alpha}{2}.$$

Az MOO_1 derékszögű háromszögből meghatározható a gömb sugara:

$$OO_1 = OM\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Tehát a gömb térfogata

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Felelet: $\frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

Szóbeli feladatok

1171. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 5 cm, magassága 4 cm. Mekkora a térfogata?

1172. Számítsd ki annak a háromoldalú gúlának a térfogatát, melynek alaplapja derékszögű háromszög, befogói 3 cm és 4 cm, magassága pedig egyenlő az alaplap átfogójával!

1173. Határozd meg annak a kúpnak a térfogatát, melynek magassága 3 cm, alaplapjának sugara pedig 1 cm!

A

1174. Egy kúp magassága 2 m, alkotója 45°-os szöget zár be az alaplap síkjával. Határozd meg a kúp térfogatát!

1175. Határozd meg annak a kúpnak a térfogatát, melynek alkotója 5 cm, magassága pedig 3 cm!

1176. Mekkora egy 2 cm sugarú gömb térfogata?

1177. Hogyan változik meg egy gömb térfogata, ha átmérőjét a duplájára növeljük?

1178. Határozd meg a gömb sugarát, ha a térfogata 36π cm^3!

1179. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága h, alaplapjának átlója d. Határozd meg a gúla térfogatát!

1180. Határozd meg a térfogatát annak a szabályos négyoldalú gúlának, melynek minden éle 1 dm!

1181. Számítsd ki a Kheopsz piramis térfogatát, ha alaplapja 5,3 ha, magassága pedig 147 m!

1182. Egy szabályos háromoldalú gúla oldaléle b, a csúcsnál lévő élszögek 90°-osak. Határozd meg a gúla térfogatát!

1183. A háromoldalú gúla oldalélei páronként kölcsönösen merőlegesek, hosszuk a, b és c. Határozd meg a gúla térfogatát!

1184. Határozd meg annak a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, melynek oldaléle b és: a) α szöget zár be az alaplap síkjával; b) β szöget zár be a gúla magasságával; c) φ szöget zár be az alapéllel!

1185. Határozd meg annak a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, melynek alapéle a és: a) az alapélnél lévő lapszög α; b) az oldalél β szöget zár be az alaplap síkjával; c) a csúcsnál lévő lapszög φ!

1186. Egy szabályos háromoldalú gúla alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm. Mekkora a térfogata?

1187. Határozd meg annak a szabályos háromoldalú gúlának a térfogatát, melynek alapéle a és: a) az alapélnél lévő lapszög α; b) az oldalél β szöget zár be az alaplap síkjával; c) a csúcsnál lévő lapszög φ!

1188. Határozd meg annak a kúpnak a térfogatát, melynek alkotója l és α szöget zár be az alaplap síkjával!

1189. Egy 18 cm magasságú ólomkúpot beolvasztottak, majd a kúppal egyenlő alapú hengerré öntötték. Mekkora a henger magassága?

1190. Egy kúp alakú sóderhalom magassága 4 m. Határozd meg a sóder térfogatát, ha annak a természetes meredeksége 30°!

1191. Két kúp alakú azonos szemestermény-halom közül az egyik kétszer nagyobb a másiknál. Mennyiszer több termény van az egyik halomban mint a másikban?

1192. Egy kúp tengelymetszete olyan derékszögű háromszög, melynek befogója $3\sqrt{2}$ cm. Számítsd ki a kúp térfogatát!

1193. Egy kúp tengelymetszete egyenlő oldalú háromszög. Határozd meg a kúp térfogatát, ha a felszíne 12π cm^2!

1194. Mekkora a 8 m^3 térfogatú kockába írt gömb térfogata?

1195. Határozd meg annak a hengernek a térfogatát, amelybe $\frac{4}{3}\pi$ cm^3 térfogatú gömb van írva!

1196. Számítsd ki a 4 dm átmérőjű gömb térfogatát!

1197. Egy gömb felszíne $16\ \pi$ cm^2. Mekkora a térfogata?

1198. Egy kocka éle a. Határozd meg a kockába írt és a köré írt gömb térfogatát!

1199. Két gömb sugarainak aránya 2 : 3. Mekkora térfogatuk aránya?

1200. Hány 0,6 cm átmérőjű gömb önthető 1 kg ólomból? Az ólom sűrűsége 11,4 kg/dm^3.

1201. Az egyik dinnye átmérője kétszer nagyobb egy másik átmérőjénél. Hányszor nehezebb az egyik dinnye a másiknál?

1202. Egy tanuló egy r sugarú üreges félgömbből homokot öntött át egy r sugarú és r magasságú kúpba, és arra a következtetésre jutott, hogy a félgömb térfogata a kúp térfogatának kétszerese. Megfelel-e a kísérleti eredmény az elméletnek?

B

1203. Határozd meg a szabályos gúla térfogatát, ha oldaléle b, a csúcsnál lévő lapszöge 2α és a gúla: a) négyoldalú; b) háromoldalú; hatoldalú!

1204. Határozd meg a szabályos tetraéder térfogatát, ha éle a!

1205. Egy gúla alaplapja olyan paralelogramma, melynek oldalai a és b, hegyesszöge pedig φ. A gúla magassága h. Határozd meg a térfogatát!

1206. A gúla alaplapja 13 cm, 14 cm és 15 cm oldalhosszúságú háromszög. Az alapéleknél lévő minden lapszög 45°. Határozd meg a gúla térfogatát!

1207. A kúp csúcsán át síkot fektettek, ami 45°-os szöget zár be az alaplap síkjával. Ez a sík a hosszúságú húrban metszi az alaplapot, ami az alaplap középpontjából 60°-os szög alatt látszik. Határozd meg a kúp térfogatát!

1208. Határozd meg annak a kúpnak a térfogatát, melynek az alaplapjában lévő m hosszúságú húr φ nagyságú ívhez tartozik és az alkotó és a magasság hajlásszöge α!

1209. A kúp alaplapjának középpontjából d hosszúságú merőlegest húztak a kúp alkotójára. Határozd meg a kúp térfogatát, ha ez a magasság α szöget zár be az alaplap síkjával!

1210. Egy kúp tengelymetszete 10 cm oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög. Határozd meg az ebbe a kúpba írt szabályos gúlát, ha a gúla: a) négyoldalú; b) háromoldalú!

1211. Bizonyítsd be Arkhimédész tételét: a gömb térfogata 1,5-szer kisebb a köré írt henger térfogatánál!

1212. Egy olyan hengerből, melynek tengelymetszete 10 cm oldalhosszúságú négyzet, gömböt kovácsoltak. Határozd meg ennek a gömbnek a térfogatát!

1213. Egy 10 cm sugarú ólomgömbből 3 cm vastagságú henger alakú lemezt készítettek. Határozd meg a lemez átmérőjét!

1214. Egy gömbcikk tengelymetszetének szárszöge 60°. Határozd meg a gömbcikk térfogatának és a megfelelő kúp térfogatának arányát!

1215. Határozd meg a kúp köré írt gömb térfogatát, ha a kúp alkotója l és α szöget zár be az alaplap síkjával!

1216. Egy gömb köré olyan szabályos négyoldalú gúlát írtak, melynek minden lapja α szöget zár be az alaplap síkjával. Határozd meg a gömb térfogatát, ha a gúla magassága h! Számítsd ki a térfogatot, ha $h = 9$ cm, $\alpha = 60°$!

1217. Egy olyan hengerből, melynek átmérője egyenlő a magasságával, a lehető legnagyobb térfogatú gömböt esztergályoztak. A henger hány százaléka hulladék?

1218. Egy üreges vasgolyó tömege 1,57 kg, külső átmérője 10 cm. Határozd meg a golyó belső átmérőjét, ha a vas sűrűsége 7,3 kg/dm^3!

1219. Legfeljebb mekkora tömegű lehet az a gömb alakú szerkezet, melynek a sugara 1 m ahhoz, hogy ne süllyedjen el a vízben?

1220. Egy 6 mm átmérőjű szappanos vízcseppből 30 cm átmérőjű szappanbuborékot fújtak. Határozd meg a szappanbuborék vastagságát!

9. számú önálló munka

1. változat

1. Számítsd ki annak a szabályos háromoldalú gúlának a térfogatát, melynek a magassága 10 cm, alapéle pedig 5 cm!

2. Egy kúp alkotója 6 cm és 30°-os szöget zár be a magasságával. Mekkora a térfogata?

3. Egy gömb térfogata 36π cm^3. Határozd meg a gömb átmérőjét!

4. Rajzolj egy szabályos tetraéderbe írt gömböt!

2. változat

1. Számítsd ki annak a hengernek a térfogatát, melynek magassága 7 cm, sugara pedig 5 cm!

2. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 6 cm és 45°-os szöget zár be a magasságával. Mekkora a térfogata?

3. Egy gömb átmérője 6 cm. Határozd meg a gömb térfogatát!

4. Rajzolj egy szabályos oktaéder köré írt gömböt!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS FELADATOK

1. Sorold fel a térfogat tulajdonságait!
2. Milyen térfogategységeket ismersz?
3. Hogyan lehet térfogatot mérni? Mondj rá példákat!
4. Mivel egyenlő a kocka térfogata?
5. Hogyan határozható meg a téglatest térfogata?
6. Milyen képlettel számítható ki a hasáb térfogata?
7. Milyen képlettel számítható ki a henger térfogata?
8. Hogyan határozható meg a gúla térfogata?
9. Mi a kúp kiszámításának képlete?
10. Mi a gömb kiszámításának képlete?

Matematikatörténeti adalékok

A mértani testeket már az ókori görög tudósok is ismerték, viszont egy más meghatározást használtak. Példaként nézzünk meg Eukleidész *Elemek* című munkájából néhány definíciót: „Testnek nevezzük azt, aminek van hossza, szélessége és mélysége. A testeket felületek határolják... A hasáb olyan test, melyet síkok ha-

tárolnak, melyek közül két szemben lévő egybevágó, hasonló, párhuzamos, a többi paralelogramma. A kocka olyan test, amelyet hat egybevágó négyzet határol."

Az ókori görögök már a forgástesteket is ismerték. A „cilinder" (henger), „kónusz" (kúp), „szféra" (gömbfelület) szavak görög eredetűek. Eukleidész *Elemek* című munkájában így jellemzi ezeket a testeket: „ A henger egy téglalap rögzített oldala körüli forgatásával keletkezik"; „A kúpot egy derékszögű háromszög egyik merőleges oldala körüli forgatásával kapjuk"; „ A gömbfelület egy félkörlap rögzített átmérője körüli forgatásával keletkezik". Mint látható az ókori görögök nem tettek különbséget a gömbfelület és a gömb között. Ezeket a fogalmakat csak később különböztették meg.

Arkhimédész (Kr. e. kb. 287 – 212) két munkáját is a forgástesteknek szentelte: *A gömbről és a hengerről, A kónuszokról és szférákról*. Szintén foglalkozott ellipszis és hiperbola forgatásával kapott testekkel. Kúpszerű felületet kapunk, ha két egymást metsző egyenes közül az egyiket forgatjuk a másik körül. Apollóniosz (Kr. e. kb. 262 – 190) *Kúpszeletek* című munkájában foglalkozott a kúpszerű felületekkel. Azt vizsgálta, mely esetben lesz a síkmetszet körvonal, ellipszis, hiperbola vagy parabola. Ezek a vizsgálódások érdemben hozzájárultak a matematika, csillagászat, mechanika és optika fejlődéséhez.

Az egyszerű soklapok térfogatát már az ókori Egyiptomban is meg tudták határozni. Az egyik napjainkig fennmaradt papiruszon egy olyan csonka gúla térfogatának meghatározása látható, melynek a magassága 6, alapélei pedig 4 és 2. Arkhimédész meg tudta határozni a paraboloid, a hiperboloid és ellipszoid térfogatát, valamint a henger, a kúp és a gömb felszínének területét is.

A mértani testek térfogatának újkori meghatározását Bernard Kavalieri (1598–1647) dolgozta ki. Az ő okfejtése nem volt elég szigorú, inkább intuitív, mivel addig még be nem bizonyított állításokra alapozta, melyeket nyilvánvalóként kezelt. Ezeket csak később, a matematikai analízis módszereivel bizonyítottak be.

A térfogat, a terület és más mennyiség szigorú elméletét H. Lebesgue (1875–1941) ismert francia matematikus dolgozta ki. A mérték fogalmán általánosította az integrál fogalmát, melyet ma már Lebesgue-integrálnak nevezünk.

A mértan fejlődéséhez az ukrán matematikusok közül H. F. Voronij, M. J. Vascsenko–Zaharcsenko, O. Sz. Szmohorzsevszkij járult hozzá.

Heorgij Feodoszijovics Voronij a Szentpétervári és Varsói Egyetem professzora. A sík egybevágó alakzatokkal való lefedésének és a tér kitöltésének kérdésével foglalkozott. A számok mértani értelmezésének megalkotója.

Mihajlo Jehorovics Vascsenko–Zaharcsenko (1825–1912) a Poltavai terület Malijivci falujában született. Kijevben és Párizsban tanult, a Kijevi Egyetem professzora. A mértan fejlődését kutatta, több segédanyagot is kiadott, lefordította Eukleidész *Elemek* című könyvét.

Olekszandr Sztepanovics Szmohorzsevszkij (1896–1969) a Vinnyicai terület Liszove községében született. Nemirovban és Kijevben tanult, a Kijevi Műszaki Egyetem professzora volt. A mértani szerkesztések problémájával foglalkozott, több segédkönyvet és tankönyvet is írt. A mértan alapjaiból tankönyvet írt az egyetemek számára. Műveit angolra, bolgárra, cseh nyelvre, japánra és más nyelvekre is lefordították.

A mértan napjainkban is fejlődik, mivel szükséges az ember mindennapjaiban. A XX. század ismert építésze, Le Corbusier ezt írta. „Sohasem éltünk még ilyen geometrikus világban... A környezetünk – a mértan világa, a szemünkben tiszta, igaz, tévedhetetlen. Körülöttünk minden mértan." Bárki lesz is a ma tanulójából, bárhová is kerül a világban, mindenütt szüksége lesz a mértanra.



HEORGIJ FEODOSZIJOVICS VORONIJ

(1868–1908)

Ukrán matematikus. Zsuravka faluban született (Csernyihivi terület), a számok mértani felépítésével és a sokszögek mértanával foglalkozott. Az egész világon alkalmazzák a Voronij-algoritmust, a Voronyij-cellákat, Voronij-módszert, Voronoj-sokszöget, Voronij-diagramot, Voronij-felbontást, Voronij-mozaikot és így tovább.

A 6. fejezet összefoglalása

A hasáb, a gúla, a csonka gúla, a szabályos testek – a legegyszerűbb és legfontosabb soklapok (poliéderek).

A *hasáb* olyan soklap, melynek két lapja egybevágó n-oldalú sokszög, a többi n lapja pedig paralelogramma. Egy hasáb *egyenes*, ha minden oldaléle merőleges az alaplapra. Egy hasáb *szabályos*, ha egyenes és alaplapja szabályos sokszög. A szabályos hasáb palástjának területe az alaplap kerületének és a hasáb magasságának szorzata.

Paralelepipedonnak nevezzük azt a hasábot, melynek az alaplapja paralelogramma. Ha a paralelepipedon oldalélei merőlegesek az alaplapra, akkor *egyenes paralelepipedonnak* nevezzük. Ha egy paralelepipedonnak mind a hat lapja téglalap, akkor az ilyen paralelepipedont *derékszögű paralelepipedonnak, téglatestnek* nevezzük. A téglatest testátlójának négyzete egyenlő a méretei négyzeteinek összegével. A téglatest minden testátlója egyenlő.

A *gúla* olyan sokszög, melynek egyik lapja tetszőleges sokszög, az összes többi lapja pedig közös csúcsú háromszög. Egy gúlát *szabályosnak* nevezünk, ha alaplapja szabályos sokszög és magasságának talppontja a sokszög középpontja. A szabályos gúla oldallap magasságát *apotémának* nevezzük. A szabályos gúla felszíne egyenlő az alaplap kerületének és apotémája szorzatának felével.

Egy soklap (poliéder) *szabályos*, ha minden lapja szabályos sokszög és minden csúcsa azonos távolságra van egy ponttól. Öt ilyen test van: szabályos tetraéder, hexaéder (kocka), oktaéder, dodekaéder, ikozaéder.

A henger, kút, csonka kúp, gömb, gömbcikk – a legfontosabb forgástestek.

A *henger* a téglalap egyik oldala körüli forgatásával keletkező test. A henger kiterítése a két alaplapból és a palástból áll. A henger alaplapjai egybevágó körlapok. A henger alaplapjai egybevágó körlapok, melyek párhuzamos síkokra illeszkednek. A palást kiterítése téglalap. Tehát ha egy henger sugara r és a magassága h, akkor a palást területe $S_p = 2\pi rh$, a felszíne pedig

$$S = \pi r(r + l).$$

A *gömb* egy félkörlap átmérője körüli forgatásával keletkezett test. A *gömbfelületet* egy félkörvonal átmérője körüli forgatásával kapjuk. Azt a síkot (egyenest), amelynek csak egy közös pontja van, a gömbfelülettel érintő síknak (érintőnek) nevezzük. Ha két gömbfelületnek csak egy közös pontja van, akkor a gömbfelületek érintik egymást.

A térfogat a test számszerűsített jellemzője.

Minden testnek létezik térfogata, melyet egy pozitív számmal jelölünk.

Egybevágó testek térfogatai egyenlők.

Ha egy testet részeire darabolunk, akkor a részek területeinek az összege egyenlő az eredeti test térfogatával.

Egy test térfogata megmérhető és kiszámítható.

A téglatest térfogata a három lineáris méretének szorzatával egyenlő: $V = abc$.

A hasáb (és a henger) térfogata az alaplap területének és magasságának szorzatával egyenlő: $V = Sh$. A henger térfogata $V = \pi r^2 h$.

A gúla (és a kúp) térfogata az alaplap területének és magassága szorzatának harmadával egyenlő: $V = \frac{1}{3}Sh$. A kúp térfogata $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Az r sugarú gömb térfogatát a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ képlettel lehet meghatározni.

Kiegészítő feladatok[1]

Számok és függvények

1221. Egyszerűsítsd a kifejezést:

a) $\frac{6x^2-9x}{2x-3}$; b) $\frac{x^2-16}{x+4}+4$; c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$;

d) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; e) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; f) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$!

1222. Határozd meg azt a két számot, melyek:

a) összege 98, különbsége 14;

b) összege 108, négyzeteik különbsége pedig 216;

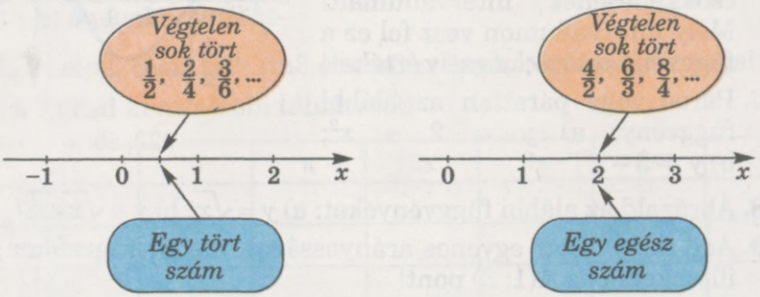
c) szorzatuk 105, különbségük 8!

1223. Melyik szám nagyobb: a) 4^3 vagy 3^4; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ vagy $\left(\frac{4}{9}\right)^2$?

1224. Bizonyítsd be:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$; b) $\frac{2}{6+\sqrt{34}}=6-\sqrt{34}$!

1225. A 221. ábra alapján magyarázd meg a „tört" és a „tört szám" fogalmak közötti különbséget!



221. ábra

1226. Mennyivel több vagy kevesebb $\frac{2}{5}$ és 2,1 szorzata összegüknél?

1227. A 3, 5, 7, 9, ... számsorozat egy számtani sorozat. Határozd meg a sorozat különbségét, 20. tagját és első 20 tagjának összegét!

1228. A 3, 6, 12, 24, ... számsorozat egy mértani sorozat. Határozd meg a sorozat hányadosát, 10. tagját és első 10 tagjának összegét!

1229. Számítsd ki az összes kétjegyű természetes szám összegét!

[1] Néhány feladat az előző évek tananyagából.

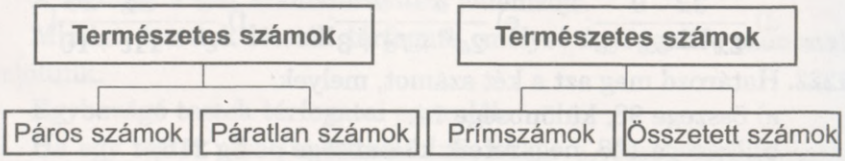
Kiegészítő feladatok

1230. Számítsd ki: a) 350 12%-át; b) 34 ha 3,5%-át!

1231. Határozd meg azt a számot, melynek 15%-a 8,7!

1232. Az egyik esemény Kr. e. a IV. században történt, egy másik esemény a XVIII. században. Hány évszázad telt el a két esemény között?

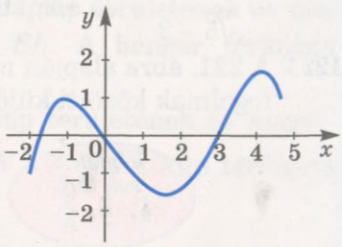
1233. Helytállóak-e az alábbi sémák:



1234. Ábrázold az alábbi függvényeket:
a) $y = 0{,}5x$; b) $y = 0{,}5x + 2$; c) $y = 0{,}5x - 3$!

1235. Készítsd el az alábbi egyenletek görbéit:
a) $x^2 + y^2 = 9$; b) $x^2 - y = 3$; c) $\sqrt{x} - y - 2 = 0$!

1236. Az $y = f(x)$ függvényt grafikonnal adták meg (222. ábra). Határozd meg a függvény értelmezési tartományát, növekedésének és csökkenésének intervallumait! Mely intervallumon vesz fel ez a függvény pozitív, negatív értéket!



222. ábra

1237. Páros vagy páratlan az alábbi függvény: a) $y = 2 + x^2$; b) $y = 3 - x^2$!

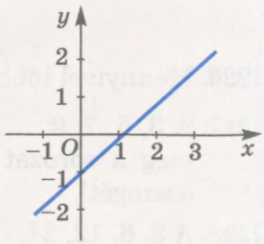
1238. Ábrázold az alábbi függvényeket: a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{x + 2}$!

1239. Add meg azt az egyenes arányosságot, melynek grafikonjára illeszkedik az $A(1; 3)$ pont!

1240. Add meg azt az lineáris függvényt, melynek grafikonjára illeszkedik az $A(4; 2)$ és $B(-4; -2)$ pont!

1241. Add meg azt a függvényt, melynek grafikonja a 223. ábrán látható!

1242. Határozd meg az $y = \frac{2}{3}x$ és az $y = 5 - x$ függvények grafikonjainak metszéspontjait!



223. ábra

1243. Az egyenlő szárú háromszög alapon lévő szögei függvénye-e a szárszögnek? Mi ennek a függvénynek az értelmezési tartománya?

1244. Az argumentum mely értékénél veszi fel az $y = (x + 7)^2$ függvény a legkisebb értékét?

1245. Határozd meg az alábbi kifejezések legkisebb értékét:
a) $(x - 3)^2 + 5$; b) $x^2 - 2x + 1$!

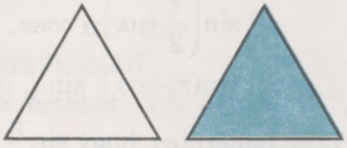
1246. Számítsd ki az $y = 1 - (x + 3)^4$ függvény legnagyobb értékét!

1247. Fogalmazz meg két olyan mondatot, melyben a „függvény" szó különböző jelentéssel bír!

1248. Fogalmazz meg két-két mondatot az alábbi homonimákkal:
a) „argumentum"; b) „kocka"; c) „hiperbola"; d) arány"!

1249. Sorold fel az alábbi szavak néhány szinonimáját: „százalék", „félegyenes", „szabályos háromszög"!

1250. A 224. ábrán látható háromszögek közül melyekre igaz, hogy „szabályos háromszög", „egyenlő szárú háromszög", „egyenlő oldalú háromszög"?



a) b)

224. ábra

1251. Mi több: a) sin 1° vagy sin3°;
b) sin1 vagy sin3?

1252. A $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ számok közül melyik: a) kisebb 1-nél;
b) nagyobb 2-nél?

1253. A sin2, cos2, tg2, sin3 és cos3 számok közül melyik negatív?

1254. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

α	0	π	2π	3π	4π	5π
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\mathrm{tg}\alpha$						

1255. Milyen feltételek mellett teljesülnek az alábbi egyenlőségek:
a) $\sin x = 1$; b) $\cos x = 0$; c) $\mathrm{tg}\, x = 1$?

1256. Mely értéknél nem létezik a $\mathrm{tg}\, x$ értéke?

1257. Határozd meg az alábbi egyenletek legkisebb pozitív gyökét:
a) $\sin x = 0{,}5$; b) $\cos x = 0{,}5$; c) $\mathrm{tg}\, x = -1$.

1258. Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\sin x \cdot \cos x$, ha $x = \frac{\pi}{6}$;

b) $\sin x + \cos x$, ha $x = \frac{\pi}{4}$.

Kiegészítő feladatok

1259. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

a) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; b) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

c) $\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha$; d) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1$!

1260. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat:

a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

b) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

d) $\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha$!

1261. Igazold az alábbi képleteket:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$;

b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$!

1262. Ismeretes, hogy $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$. Számítsd ki $\cos\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$!

1263. Határozd meg a függvény helyettesítési értékét:

a) $\cos x$ és $\operatorname{tg} x$, ha $\sin x = 0{,}6$ és $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

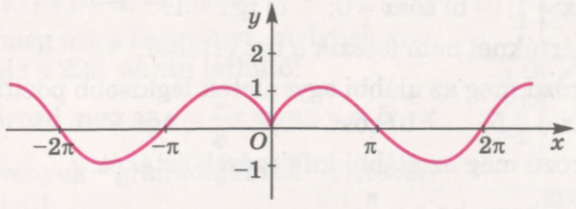
b) $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$, ha $\cos x = -0{,}8$ és $\frac{\pi}{2} < x < \pi$!

1264. Igazold, hogy a $\sin 2x = 2\sin x$ nem minden x-re teljesül! És a $\cos 3x = 3\cos x$?

1265. Hogyan lehet az $y = -\sin x$ és az $y = 1 - \sin x$ függvény grafikonját az $y = \sin x$ függvény grafikonjából megkapni?

1266. Hogyan lehet az $y = \cos x$ függvény grafikonjából megkapni az $y = |\cos x|$ függvény grafikonját?

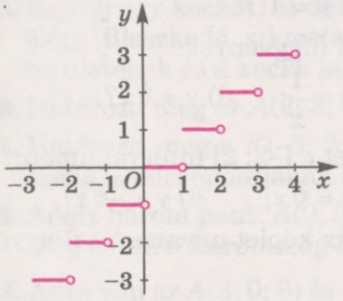
1267. Periodikus-e az a függvény, melynek a grafikonja a 225. ábrán látható?



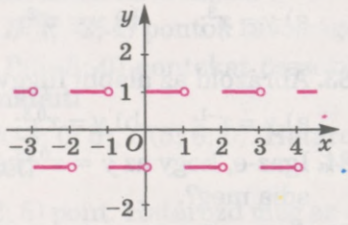
225. ábra

1268. Miért nem periodikus az $y = x + \sin x$ függvény?

1269. Az x-től nem nagyobb egész számot $[x]$ szimbólummal jelöljük. Periodikusak-e az $y = [x]$ és az $y = (-1)^{[x]}$ függvények, melyek grafikonjai a 226. és 227. ábrán láthatók?



226. ábra



227. ábra

1270. Rajzold le az $y = x - [x]$ függvény grafikonját!

1271. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét: 2^{-3}, 3^{-2}, $8 \cdot 2^{-4}$, $25 \cdot 5^{-3}$, $3^5 \cdot 3^{-5}$!

1272. Töltsd ki a táblázatot:

α	–3	–2	–1	0	1	2	3
α^{-1}							
α^{-2}							
α^{-3}							

1273. Határozd meg az x^5x^{-2} kifejezés értékét, ha $x = -3$!

1274. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

a) $(a^{-1} + 3)(a^{-1} - 3)$; b) $(x^{-2} - c^{-2})\, c^2x^2$!

1275. Határozd meg a következő kifejezések értékét: $8^{\frac{2}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{0,5}$, 49^0, $27^{-\frac{1}{3}}$!

1276. Számítsd ki számológéppel:

a) $34^{0,3}$; b) $2,3 \cdot 3,8^{-2}$; c) $7,8^{-2} : 0,4^{2,3}$!

1277. Írd fel gyök alakban: $m^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $(ab)^{0,5}$, $p^{0,2}$!

1278. Írd fel hatványalakban: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{xz}$, $\sqrt[5]{a^2}$!

1279. Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$; b) $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20}$; c) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt{3}$!

1280. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

a) $(\sqrt{x} - c)(\sqrt{x} + c)$; b) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt[4]{a} - 1)$;

c) $(\sqrt[4]{2} + 1) : \dfrac{1}{\sqrt[4]{2} - 1}$; d) $1 : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$!

Kiegészítő feladatok

1281. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x-2}=3$; b) $\sqrt[3]{x-4}=2$;

c) $(x+1)^{0,5}=1$; d) $(3-x)^{\frac{1}{3}}=1$!

1282. Hatványfüggvények-e az alábbi függvények:

a) $y=x^3$; b) $y=x^{-2}$; c) $y=\frac{1}{x}$; d) $y=\sqrt[4]{x}$?

1283. Ábrázold az alábbi függvényeket a $[-2; 2]$ intervallumon:

a) $y=x^{-1}$; b) $y=x^{0,5}$; c) $y=\sqrt[3]{x}$; d) $y=-\sqrt[3]{x}$!

1284. Igaz-e, hogy az $y=x^{0,25}$ és $y=\sqrt[4]{x}$ képlet ugyanazt a függvényt adja meg?

1285. Az $y=f(x)$ függvény hatványfüggvény. Hatványfüggvény-e az $y=1+f(x)$ függvény?

1286. Illeszkedik-e az $y=\sqrt[3]{x}$ függvény grafikonjára az $A(27; 3)$ pont? És a $B(-8; -2)$?

1287. Az $y=kx^3$ függvény grafikonja átmegy az $M(2; 16)$ ponton. Mennyi a k értéke?

1288. Az $y=kx^{-2}$ függvény grafikonja átmegy a $P(\frac{1}{2}; 12)$ ponton. Illeszkedik-e ennek a függvénynek a grafikonjára a $K(\frac{1}{3}; 27)$ pont?

1289. Hatványfüggvények-e az alábbi függvények:

a) $y=x^5$; b) $y=3^x$; c) $y=(\sqrt{2})^x$; d) $y=\pi^x$?

1290. Növekvő vagy csökkenő az: a) $y=0,5^x$; b) $y=1,5^x$ függvény?

1291. Ábrázold az alábbi függvényt a megadott intervallumon:

a) $y=2^x$, $[-3; 3]$;

b) $y=0,5^x$, $[-4; 2]$!

1292. Igaz-e, hogy az $y=2^{-x}$ és az $y=0,5^x$ képlettel megadott függvények azonosak? Miért?

1293. Oldd meg az egyenletet:

a) $2^x=32$; b) $3^x=81^{-1}$; c) $8\cdot 0,5^x=0,25$!

Az egyenes és a sík a térben

1294. Nevezz meg olyan alakzatokat, melyek nem mértaniak!

1295. Egy mértani alakzatot alkot-e: a) két egymást metsző sík; b) két párhuzamos sík?

1296. Hány részre osztja a teret: a) két párhuzamos sík; b) két egymást metsző sík?

1297. Hány részre oszthatja a teret három sík?

1298. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ test egy kocka, amelyben $AA_1 = a$. Határozd meg az A pont és: a) a C és C_1 pont; b) a BCC_1 és B_1BD sík távolságát!

1299. Rajzolj egy kockát, és ábrázold a kocka és a két szemben lévő élére illeszkedő síkmetszetét! Határozd meg a síkmetszet területének és a kocka lapja területének az arányát!

1300. Határozd meg az $A(2; 3; 0)$ és a $B(3; -2; 4)$ pontok távolságát!

1301. Határozd meg a $K(-3; 2; 6)$ és $P(5; 8; 0)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontjának koordinátáit!

1302. Adott három pont: $A(0; 0; 2)$, $B(-3; 0; 5)$, $C(5; 6; 0)$. Határozd meg az ABC háromszög kerületét!

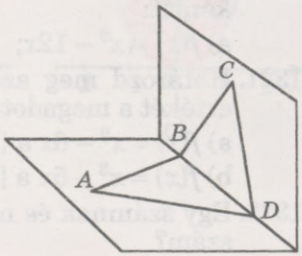
1303. Adva van az $A(3; 0; 6)$ és $C(2; -2; 5)$ pont. Határozd meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CA}$ vektorok koordinátáit!

1304. Számítsd ki az $\vec{a} = (0; 1; 2)$ és $\vec{c} = (-3; 0; 5)$ vektorok összegét és különbségét!

1305. Az $ABCD$ alakzat egy térbeli töröttvonal (228. ábra). Teljesülnek-e az alábbi vektoregyenlőségek:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$?



228. ábra

1306. $A(3; -1; 0; 2)$ és $B(1; -3; -2; 0)$ egy négydimenziós tér két pontja. Határozd meg: a) az AB szakasz hosszát; b) az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$ vektorok koordinátáit!

Derivált és integrál

1307. Határozd meg az alábbi függvények iránytangensét:

a) $y = 0{,}5x - 4$; b) $y = 3(2 - x)$; c) $y = \frac{1}{3}(2x - 5)$!

1308. Melyik függvény növekszik gyorsabban, az $y = 0{,}8x - 1$ vagy az $y = 0{,}7x + 5$?

1309. Határozd meg az $y = 1 - 2x$ függvény grafikonja és az x tengely közötti szög tangensét!

1310. Igaz-e, hogy az $y = 3x - 8$ függvény deriváltja az értelmezési tartományának minden pontjában 3?

1311. Határozd meg az alábbi függvények derivált függvényeit:

a) $y = 1{,}5x + 3$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 0{,}5(2x - 3)$!

1312. Adott az $f(x) = x^2 - 5$ függvény. Számítsd ki: $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(3)$!

1313. Adott az $f(x) = \sin x$ függvény. Számítsd ki: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$!

1314. Határozd meg az alábbi függvények derivált függvényeit:
a) $f(x) = 2x^3$; b) $f(x) = x^5 - 3x^2$; c) $f(x) = (x^2 - 1)x^3$!

1315. Határozd meg a következő függvények kritikus pontjait:
a) $f(x) = x^5 - 5x$; b) $f(x) = x^4 - 0{,}5x$!

1316. Számítsd ki az alábbi függvények növekedésének és csökkenésének intervallumait:
a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$; b) $f(x) = 8 + 6x^2 - 3x^4$!

1317. Határozd meg a követező függvények maximumát vagy minimumát:
a) $f(x) = 3 + x - x^2$; b) $f(x) = x^3 - 4x + 5$!

1318. Igaz-e, hogy az $y = x^5 + 3x$ függvény az egész értelmezési tartományán növekvő?

1319. Igazold, ha $x > 1$, akkor az $y = 10 + x^3$ függvény csökkenő?

1320. Végezz teljes függvényvizsgálatot, és ábrázold a függvény grafikonját:
a) $f(x) = x^3 - 12x$; b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$!

1321. Határozd meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét a megadott intervallumon:
a) $f(x) = x^2 - 6x$ a $[-5; 0]$ intervallumon;
b) $f(x) = x^3 - 5x$ a $[-2; 3]$ intervallumon!

1322. Egy számnak és négyzetének összege minimális. Melyik az a szám?

1323. Határozd meg a 20 cm kerületű téglalapok köré írt körvonalak közül a legkisebb átmérőjű körvonal átmérőjét!

1324. Az 1 m^3 térfogatú szabályos négyoldalú hasábok közül melyik felszíne a legkisebb?

1325. Primitívje-e x^3 az alábbi függvényeknek: $3x^2$; $3x^2 - 8$?

1326. Határozd meg az x^2 függvény azon primitív függvényét, melynek grafikonjára illeszkedik az $A(1; 9)$ pont!

1327. Határozd meg az alábbi függvények primitív függvényének általános alakját:
a) $f(x) = x^3 + 2$; b) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$!

1328. Határozd meg az $f(x)$ függvény $F(x)$ primitívjét, ha:
a) $f(x) = x^2 - 1$ és $F(1) = 3$;
b) $f(x) = 2 - x^3$ és $F(2) = 5$!

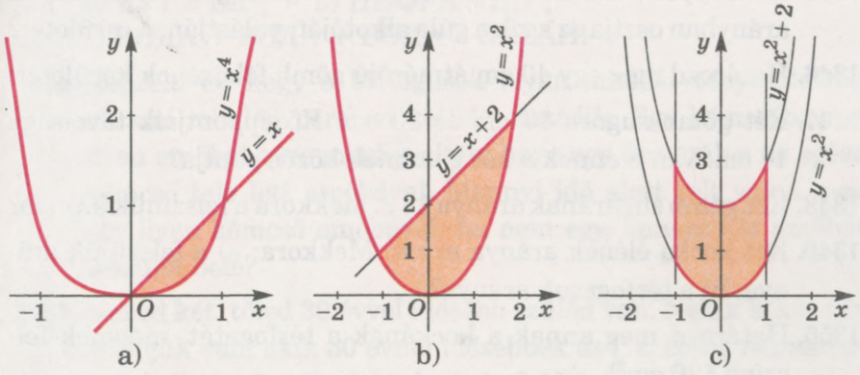
1329. Számítsd ki a grafikon alatti síkrész területét:
a) $y = x^2$ a $[0; 2]$ intervallumon;
b) $y = 4 - x^2$ a $[-1; 1]$ intervallumon!

1330. Számítsd ki az integrált:
a) $\int_0^3 x^2 dx$; b) $\int_0^2 (x - 1)dx$; c) $\int_1^3 (x^2 + x - 1)dx$!

1331. Határozd meg az $y = 9 - x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkrész területét!

1332. Határozd meg az $y = x^2 + 1$ és $y = 2x + 1$ függvények grafikonjai által határolt síkrész területét!

1333. Határozd meg a 229. ábrán látható besatírozott síkrészek területeit!



229. ábra

Mértani testek

1334. Hány átlója van egy n-oldalú hasábnak?

1335. Egy szabályos háromoldalú hasáb minden éle 10 cm. Számítsd ki a gúla palástjának területét!

1336. Egy szabályos háromoldalú gúla minden éle 2 dm. Számítsd ki a gúla felszínét!

1337. Lehet-e egy gúla alaplapjának a területe egyenlő a palást területével? Miért?

1338. Lehet-e egy kocka síkmetszete derékszögű háromszög?

1339. Egy szabályos tetraéder éle 4 cm. Számítsd ki annak a síkmetszetnek a területét, amely átmegy az egyik él felezőpontján és párhuzamos az egyik lappal!

1340. Egy henger tengelymetszete 12 cm oldalhosszúságú négyzet. Határozd meg ennek a hengernek a felszínét!

1341. Egy a oldalú négyzetet egyik oldala körül forgatunk. Határozd meg a henger felszínét!

1342. Egy henger felszíné 2-szer nagyobb a palást területénél. Igaz-e, hogy ennek a hengernek a magassága egyenlő a sugarával?

Kiegészítő feladatok

1343. Egy kúp tengelymetszete olyan derékszögű háromszög, melynek az átfogója 35 cm. Számítsd ki ennek a hengernek a magasságát és sugarát!

1344. Létezik-e olyan kúp, melynek a felszíne 2-szer nagyobb a palást területénél?

1345. Az alappal párhuzamos sík a gúla magasságát felezi. Milyen arányban osztja ez a sík a gúla alkotóját; palástjának területét?

1346. Határozd meg egy 40 cm átmérőjű gömb főkörének kerületét!

1347. Két gömb sugara 17 cm és 10 cm. Középpontjaik távolsága 14 cm. Van-e ennek a két gömbnek közös pontja?

1348. Két gömb sugarának aránya 1 : 2. Mekkora a felszínük aránya?

1349. Két kocka élének aránya $m : n$. Mekkora: a) a felszínük aránya; b) a térfogatuk aránya?

1350. Határozd meg annak a kockának a térfogatát, melynek felszíne 120 cm^2!

1351. Határozd meg annak a szabályos háromoldalú hasábnak a térfogatát, melynek minden éle 6 dm!

1352. Határozd meg annak a henger alakú hordónak a térfogatát, melynek magassága 9 dm, alaplapjának átmérője pedig 8 dm!

1353. Két hengernek egyenlő a magassága, alaplapjaik sugarainak aránya pedig 2 : 3. Milyen: a) a felszíneik; b) térfogataik aránya?

1354. Számítsd ki a gömb felszínét és térfogatát, ha: a) átmérője 1 m; b) főkörének kerülete 1 m!

1355. A Mars átmérője kétszer kisebb a Föld átmérőjénél. Hányszor kisebb a Mars felszíne a Föld felszínénél? Hányszor kisebb a Mars térfogata a Föld térfogatánál?

1356. Határozd meg annak a testnek a felszínét és térfogatát, amely egy egyenlő szárú derékszögű háromszög 40 cm hosszú átfogója körüli forgatásával keletkezett!

Nehezebb feladatok

1357. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám ötödik hatványa ugyanarra a számjegyre végződik, mint az első hatványa!

1358. Helyettesítsd a következő példákban a csillagokat számjegyekkel úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

a) $** \cdot ** = 1*1$; b) $** \cdot 92 = ***$;

c) $** + ** = *97$; d) $** \cdot 45 = *3*$!

1359. Helyettesítsd a különböző betűket különböző számjegyekkel, úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

a) КУТ = БА^{К}; b) ЦИФРА = ДВ^{А};

c) ВОДА + ВОДА + ВОДА = ОКЕАН!

1360. Képzeld el, hogy a biológusok olyan amőbát tenyésztettek ki, ami minden percben kétfelé osztódik. Egy kémcsőbe egy ilyen amőbát téve megfigyelték, hogy egy óra múlva az egész kémcső tele lett amőbával. Mennyi idő alatt telt volna meg egy ilyen kémcső amőbával, ha nem egy, hanem két amőbát teszünk bele?

1361. Neked két, tőled 30 évvel idősebb szülőd van. Nekik is két-két szülőjük van, akik 30 évnél idősebbek és í. t. Hány felmenődnek kell lenni a X. század végére? Miért volt belőlük sokkal kevesebb?

1362. Euler feladata. Tételezzük fel, hogy a népesség évente 0,01-dal nő. Hány év múlva lesz 10-szer több ember a földön?

1363. Newton feladata. Egy vállalkozó minden évben 100 fontot költ a családjára, és a maradék tőkéjét harmadával növeli. Ez a vállalkozó három év alatt a tőkéjét megduplázta. Mennyi volt az induló tőkéje ennek a vállalkozónak?

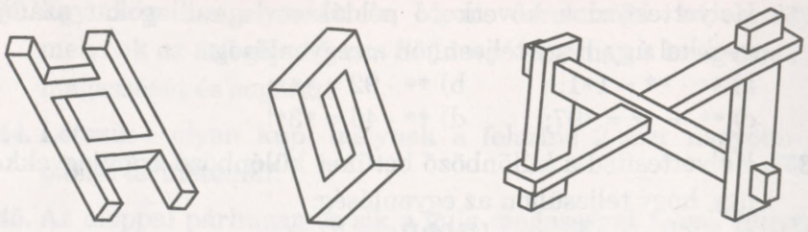
1364. Avicenna feladata. Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 1, 4 vagy 7, akkor a szám köbének 9-cel való osztási maradéka 1. Bizonyítsd be!

1365. Arkhimédèsz feladata. A gömb köré írt henger térfogata és felszíne 1,5-szer nagyobb a gömb térfogatánál és felszínénél. Bizonyítsd be!

1366. Leonardo da Vinci feladata. Melyik henger palástjának területe egyenlő az alaplap területével?

1367. Egy szappant egyenletesen használnak. Hét nap múlva a szappan minden mérete a felére csökkent. Hány napra elegendő még ez a szappan?

1368. Léteznek-e a 230. ábrán látható soklapok?



230. ábra

1369. Válaszolj az alábbi kérdésekre:

1. Hogy keletkeztek a természetes számok?
2. Hogy adjuk össze a természetes számokat?
3. Mit nevezünk az a szám osztójának?
4. Mit nevezünk törtszámoknak?
5. Hogyan kell összeadnia különböző nevezőjű törteket?
6. Hogyan kell tizedes törteket kerekíteni?
7. Hogyan hasonlítjuk össze a racionális számokat?
8. Mit nevezünk számkifejezésnek?
9. Mi az algebrai tört?
10. Mit nevezünk többtagú kifejezésnek?
11. Hogyan kell összeszorozni két többtagú kifejezést?
12. Mivel egyenlő két kifejezés négyzetének különbsége?
13. Mikor mondhatunk két egyenletrendszert ekvivalensnek?
14. Milyen egyenletet nevezünk másodfokúnak?
15. Hogyan kell megoldani a törtes egyenleteket?

Alkotói feladatok témakörei

1. Mi a matematika? – [2, 17, 28 , 32, 34]
2. A matematika helye a többi tudományágak között – [2, 7, 17, 28, 34]
3. Püthagorasz és püthagoreus iskola – [5, 18, 32, 33, 34, 23 (2009, 4 – 5)]
4. A tetraéder geometriája – [4, 36]
5. Prímszámok [16, 32, 33, 29 (18)]
6. Bűvös négyzetek – [33, 24 (2010, 10), 29 (9)]
7. Mit értünk számon? – [2, 16, 28]
8. Mi az algebra? – [2, 11, 16, 28]
9. A π szám – [11, 16, 28, 33]
10. A matematika és a naptár – [33, 29 (9)]
11. Euler és a geometria – [11, 33, 34]
12. Diophantoszi egyenletek – [10, 11, 16, 18, 33]
13. Perspektíva a geometriában és a művészetben – [27, 33]
14. Nemeuklideszi geometria – [2, 5, 16, 22, 34]
15. Mi a topológia? – [12, 33]
16. Napóleon problémája – [4, 33]
17. Görög matematikusok – [2, 11, 12, 16]
18. Az európai felvilágosodás kiváló matematikusai – [3, 11, 16]
19. Omar Khayyam matematikus és költő – [5, 11, 18, 22]
20. Descartes francia matematikus és filozófus– [5, 11, 16, 18, 34]
21. Fermat francia matematikus és jogász – [5, 11, 18, 33, 34]
22. Pascal erkölcsfilozófiája –[5, 18, 34]
23. Galois matematikus és forradalmár – [5, 12, 16, 33, 34]
24. A geometria és a marseillaise – [13, 34]
25. Leibniz könyvtáros és történetíró – [5, 12, 18, 33, 34]
26. Kovalevszka matematikus és irodalmár – [5, 33, 34]
27. Matematika és a sakk – [33, 10]
28. Mi a matematikai logika? – [16, 32, 33, 29 (10)]
29. Hogyan alakult ki a kibernetika? – [16, 20, 33, 29 (16)]
30. A matematika fejlődése Ukrajnában – [1, 2, 3, 19, 34]
31. Osztrohradszkij matematikus és hazafi – [2, 3, 19, 34, 29 (16)]
32. Valószínűség – [2, 32, 33]
33. Jelek, szimbólumok eredete – [5,20]
34. Kombinatorikai feladatok és kombinatorika – [2, 12, 16, 32, 33]
35. Halmazok a mai matematikában – [16, 33, 23 (2010, 6)]
36. Matematika és a romantika – [7, 9, 15, 16]
37. A sík parkettázása és az ornamentika geometriai törvényei – [33, 24 (2009, 27)]
38. M. Kravcsuk élete – [1, 5, 26, 34]
39. Homonimák és szinonimák a matematikában – [35, 23 (2008, 7–8)]
40. Matematikai terek – [35, 25 (2010, 3)
41. Fraktálok a művészetben és a természetben – [2]
42. Térszög és a szteradián – [4, 24]
43. Kúpszerű felületek síkmetszetei – [33, 36]
44. A kör négyszögesítése – [3, 24 (2008, 30)]
45. Az magyar matematikai nyelv kialakulása – [3, 24 (2008, 7)]
46. Zrínyi Ilona matematikaverseny – [22, 23 (2010, 5)]
47. A matematikai tankönyvek története [3, 24 (2010, 4), 23 (2010, 7)]

Ajánlott irodalom

1. Аксіоми для нащадків : Українські імена у світовій науці / Упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.
2. Бевз В.Г. Історія математики. – Харків, 2006.
3. Бевз Г.П. Математика в школах України. – К., 2009.
4. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.
5. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.
6. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Статистика, ймовірність, комбінаторика у старшій школі. – Харків, 2008.
7. Василенко О. Серенада математиці. – Харків, 2003, 2009, 2010, 2011.
8. Василенко О.О. Жінки й математика. – Харків, 2008.
9. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.
10. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Харків, 2008. – Кн. 1, 2.
11. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.
12. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.
13. Демянов В. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.
14. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов, 1995.
15. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.
16. Кованцов М.І. (редактор). Математична хрестоматія. – К., 1977.
17. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.
18. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.
19. Конфорович А., Сорока М. Остроградський. – К., 1980.
20. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.
21. Ліо Кі. Ломиголовки. – К., 1996.
22. Маркова І.С. (упорядник). Математика після уроків. – Харків, 2004.
23. Математика в школі : Журнал.
24. Математика в школах України : Журнал.
25. Математична газета.
26. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.
27. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.
28. Тадеєв В.О. Математика. Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1999.
29. У світі математики. – 1968–1991. – Вип. 1–20.
30. У світі математики : Журнал.
31. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.
32. Шляхами математики / Упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.
33. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.
34. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.
35. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика, 10–11 класи. – К., 2005.
36. Тадеєв В.О. Геометрія, 11 клас. – Тернопіль, 2004.

Argumentum növekménye 52

Beírt poliéder 258
– testek 258
Biztos esemény 166

Csonka gúla 226
– kúp 245
Csökkenő függvény 7

Deriválási képletek 67
Derivált 56
– alkalmazása 78
– geometriai értelmezése 59
– mint változási sebesség 91
Diagram 155
Differenciál 98
Differenciálás 65
Domború poliéder 212

Egyenes hasáb 217
Egytagú kifejezés deriváltja 66
Elemi esemény 167
Érintő 58
Euler-féle szám, *e*-szám 17
Exponenciális egyenlet 23
– egyenlőtlenség 24
– függvény 15
– függvény deriváltja 67
– függvény tulajdonságai 16
Extrémumpont 79

Faktoriális 140
Félgömb 251
Ferde hasáb 217
Folytonos függvény 52
Forgási alakzatok 238
Forgástest 237
Főkör 251
Függvény 6
– csökkenésének intervallumai 78
– csökkenésének ismertetőjele 78
– elemzése 78
– értékkészlete 6
– értelmezési tartománya 6
– folytonossága 52
– határértéke 50
– kritikus pontjai 78
– maximuma 79, 86
– maximumának ismertetőjele 79
– minimuma 79
– minimumának ismertetőjele 79
– növekedésének intervallumai 78
– – ismertetőjele 78
– növekménye 52
– periódusa 7
– pontbeli deriváltja 65
– primitívjének meghatározása 101
– szélsőértékei 79
– szélsőértékhelyei 79
Függvényargumentum 6
Függvényérték 50
Függvénygrafikon érintője 58
Függvénygrafikon 6

Gömb 252
– átmérője 251
– középpontja 251
– sugara 251
– térfogata 270
Gömbfelület felszíne 253
Gömbfelület egyenlete 202
Görbe vonalú trapéz 107
Grafikon alatti síkrész 107
Gúla 224
– alapja 224
– apotémája 224
– csúcsa 224
– éle 224
– felszíne 225
– magassága 224
– palástja 225
– tengelymetszete 224
– térfogata 268
Gyakorisági táblázat 149

Hajlásszög 58
Halmaz 133
– eleme 133
Halmazok egyesítése 134
– különbsége 134
– uniója 134
Hányados deriváltja 67
Hasáb 217
– alapja 217
– átlója 218

– éle 217
– felszíne 218
– magassága 217
– palástja 218
– tengelymetszete 218
– térfogata 263
Határozatlan integrál 115
Határozott integrál 115
Hatvány 14
Hatvány tulajdonságai 14
Hatványfüggvény 15
– deriváltja 67
Henger 238
– alapja 238
– alkotója 238
– felszíne 239
– hálója 239
– magassága 238
– sugara 239
– térfogata 264
Hisztogram 156

Integrál 112
– alkalmazása 121
– határa 113
Integrálás 101
– változója 113
Integrálösszeg 113
Integrandus 113
Inverz függvény 32
Iránytangens (Meredekség) 58

Klasszikus valószínűség 168
Kocka 218
– térfogata 262
Kombináció 145
Kombinatorika 138
Kombinatorikai feladatok 138
Konstans deriváltja 61
Koordináta-rendszer 189
Koordinátatengelyek 189
Kúp 244
– alapja 244
– alkotója 244
– csúcsa 244
– felszíne 245
– hálója 244
– magassága 244
– palástja 245
– sugara 244
– tengelye 244
– térfogata 268
Kúpszerű felület 245

Lehetetlen esemény 166
Logaritmus 30
– alapazonossága 30
– alapja 30
– tulajdonságai 30
Logaritmusfüggvény 31
– deriváltja 67
– tulajdonságai 32
Logaritmusos egyenlet 37
– egyenlőtlenség 39
Matematikai analízis 128
– statisztika 149
Maximumhely79
Mértan 3
Mértani test 211
Minimumhely 79
Minta 149
– átlaga 150
– eleme 149
– mediánja 150
– módusza 150
– terjedelme 149

Négyzetes átlag 150
Newton–Leibniz-tétel 114
Normál eloszlás 184
Növekvő függvény 7

Összeg deriváltja 66
Összetett függvény 72
– deriváltja 72

Paralelepiped 218
– térfogata 263
Páratlan függvény 7
Páros függvény 7
Periodikus függvény 7
Permutáció 145
Pillanatnyi sebesség 91
Poliéder 212
– csúcsa 212
– éle 212
– felszíne 212
– hálója 212
– metszete 213

Poligon 156
Pont koordinátái 189
Primitív függvény 101

Relatív gyakoriság 175
Rendezett halmaz 138
Részhalmaz 133

Sík egyenlete 201
Statisztika 149
Statisztikai sor 149
– valószínűség 175
Szabályos dodekaéder 231
– gúla 224
– oktaéder 231
– poliéder 230
– poliéder középpontja 230
– tetraéder 212
Szelősík 212
Szélsőértékhely létezésének feltétele 79
Szórás 177
Szorzásszabály 139
Szorzat deriváltja 66

Természetes logaritmus 32
Tetraéder 212
Tízes alapú logaritmus 32
Trigonometrikus függvény deriváltja 67

Üres halmaz 133

Valós kitevőjű hatvány 14
Valószínűségi eloszlás 176
Változó erő munkája 122
Várható érték 177
Variáció 144
Véges halmaz 133
Végtelen halmaz 133
Vektor hossza 195
– koordinátái 194
Vektorok 194
– alkalmazása 200
– közötti szög 200
– összege 195
– skaláris szorzata 200
Véletlen esemény 165
– mennyiség 176

Kiegészítő tananyag[1]

A műveletek tulajdonságai

$a + b = b + a$; $(ab)c = a(bc)$;

$(a + b) + c = a + (b + c)$; $a(b + c) = ab + ac$.

$ab = ba$;

A törtek tulajdonságai

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},\quad \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},\quad \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},\quad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

Nevezetes azonosságok

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

A hatványozás és gyökvonás azonosságai

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $(ab)^n = a^n b^n$; $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

$(a^m)^n = a^{mn}$; $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

A logaritmus azonosságai

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $a^{\log_a x} = x$,

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$,

$\log_a x^p = p \log_a x$,

$\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$.

[1] A képletek nem tartalmazzák azokat a feltételeket, amelyek mellett teljesülnek.

A szám normálalakja

$x = a \cdot 10^n$, ahol $1 \leqslant a < 10$,
n az x szám nagyságrendje, karakterisztikája.

Egyenletek

Az $ax = b$ egyenletnek
1 gyöke van, ha $a \neq 0$;
0 gyöke van, ha $a = 0$ és $b \neq 0$;
végtelen sok gyöke van, ha $a = 0$ és $b = 0$.

Másodfokú egyenlet

$ax^2 + bx + c = 0$ – az egyenlet általános alakja;

$D = b^2 - 4ac$ – a diszkrimináns képlete;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$x^2 + px + q = 0$ – másodfokú egyenlet, melynek a négyzetes tag együtthatója 1,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$ – az előző egyenlet gyökei;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$$ – Viéte képletek.

Transzcendens egyenletek

$a^x = b$; $\quad x = \log_a b$;

$\log_a x = b$; $\quad x = a^b$;

$\sin x = a$; $\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$;

$\cos x = a$; $\quad x = \pm \arccos a + 2\pi n$;

$\operatorname{tg} x = a$; $\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n$.

Egyenlőtlenségek

$a > b$, ha $a - b$ pozitív;
$a < b$, ha $a - b$ negatív.

Az algebrai egyenlőtlenségek tulajdonságai

Ha $a < b$, akkor $b > a$.
Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.
Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$.
Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $ac < bc$.
Ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $ac > bc$.
Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a + c < b + d$.
Ha $0 < a < b$ és $0 < c < d$, akkor $ac < bd$.

Sorozatok

Számtani sorozat: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Mértani sorozat: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \ldots$

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

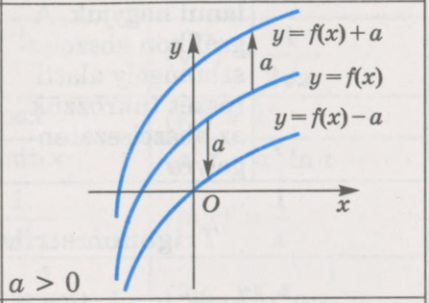
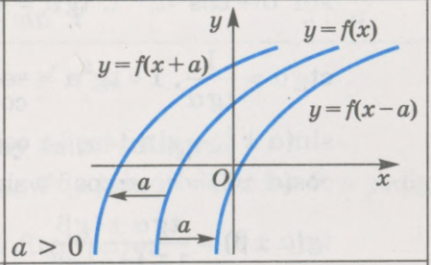
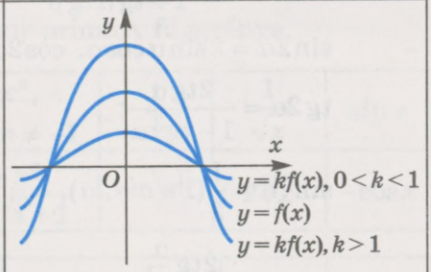
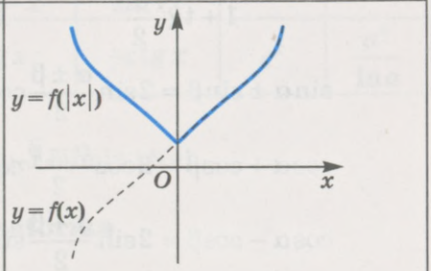
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

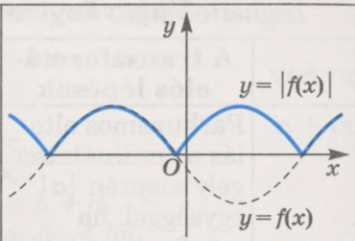
$$S_n = \frac{b_1}{q - 1}, \quad \text{ha} \quad |q| < 1.$$

Függvények

$y = kx + b$ – lineáris függvény; grafikonja egyenes.
$y = ax^2 + bx + c$ – másodfokú függvény; grafikonja parabola, melynek csúcsa a $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ pont.
$y = x^2$ – hatványfüggvény.
$y = a^x$ – exponenciálisfüggvény.
$y = \log_a x$ – logaritmusfüggvény.
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ – trigonometrikus függvények.

Függvénytranszformációk

Függvény	A transzformációs lépések	Grafikus ábrázolás
$y = f(x) + a$	Párhuzamos eltolás az ordinátatengely mentén $\lvert a \rvert$ egységgel, ha $a > 0$, akkor felfelé; ha $a < 0$, akkor lefelé	
$y = f(x + a)$	Párhuzamos eltolás az abszcisszatengely mentén $\lvert a \rvert$ egységgel, ha $a > 0$, akkor jobbra; ha $a < 0$, akkor balra.	
$y = kf(x)$	k-szoros nyújtás az abszcisszatengelytől, az ordináta tengely mentén ha $k > 1$. $\frac{1}{k}$-szoros zsugorítás az abszcisszatengelyhez, az ordinátatengely mentén ha $k > 1$	
$y = f(\lvert x \rvert)$	Az $x \geqslant 0$ argumentumértékekhez tartozó függvény grafikonját változatlanul hagyjuk és tükrözzük az ordinátatengelyre. A függvény grafikonja ennek a két görbének az egyesítése: $y = f(x)$, $x \geqslant 0$ és $y = f(-x)$, $x < 0$	

$y = \|f(x)\|$	A grafikon abszcisszatengely feletti részét változatlanul hagyjuk. A grafikon abszcisszatengely alatti részét tükrözzük az abszcisszatengelyre	

Trigonometrikus azonosságok

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Derivált

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

$C' = 0$	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)' = Cu'$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(u + v)' = u' + v'$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Ha $y = f(u)$, ahol $u = h(x)$, akkor $y' = y'_u u'$.

Primitívfüggvény és az integrál

Ha az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitívje és $k \neq 0$, b pedig állandó, akkor:

$kF(x)$ a $kf(x)$ függvény primitív függvénye;

$\dfrac{1}{k}F(kx + b)$ az $f(kx + b)$ függvény primitív függvénye.

Függvény	0	k	x^n, $n \neq -1$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$
Egyik primitív függvénye	C	kx	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$

Függvény	$\cos x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
Egyik primitív függvénye	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	e^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ – Newton–Leibniz-tétel.

Kombinatorika

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$,

$P_n = n!$,

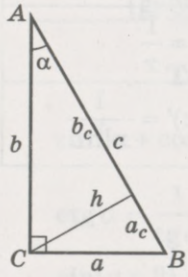
$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Derékszögű háromszög



$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad a^2 + b^2 = c^2;$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad a^2 = a_c \cdot c;$$

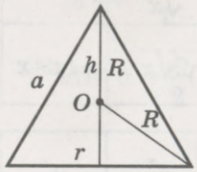
$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad b^2 = b_c \cdot c;$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha; \quad h^2 = a_c \cdot b_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch; \quad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha; \quad h = \frac{ab}{c};$$

$$R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Egyenlő oldalú (szabályos) háromszög

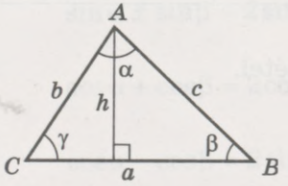


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{1}{3}h; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{2}{3}h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r; \quad h = R + r.$$

Általános háromszög



$$S = \frac{1}{2}ah; \; S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

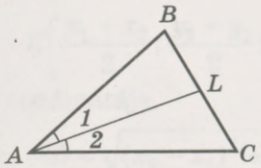
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (Héron képlete);}$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \; r = \frac{S}{p}; \; R = \frac{a}{2\sin\alpha};$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (koszinusztétel);

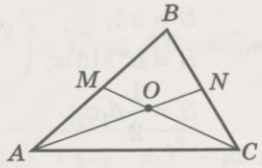
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ (szinusztétel).



AL – szögfelező

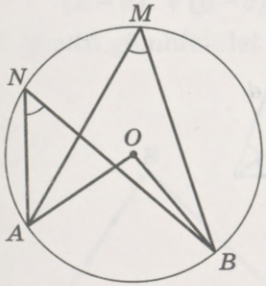
1) $1\angle = 2\angle$;

2) $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.



AN, CM – súlyvonal

$AO : ON = 2 : 1$.



Körvonal

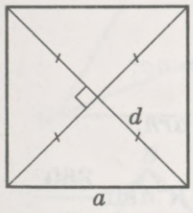
$C = 2\pi r$;

$S = \pi r^2$;

$AMB\angle = \frac{1}{2}AOB\angle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$;

$AMB\angle = ANB\angle$.

Négyzet

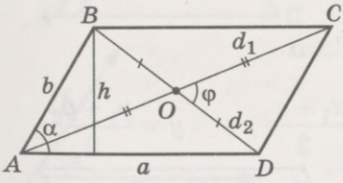


$d = a\sqrt{2}$; $r = \frac{a}{2}$;

$P = 4a$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$.

Paralelogramma



$A\angle + B\angle = 180°$;

$P = 2(a + b)$;

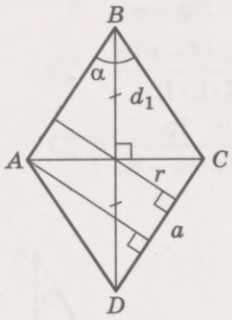
$S = ah$;

$S = ab\sin\alpha$;

$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Rombusz



$P = 4a;$

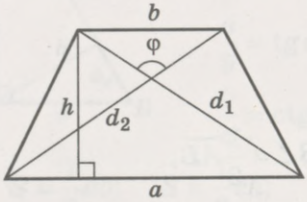
$S = ah;$

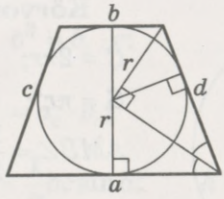
$S = a^2 \sin\alpha;$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2;$

$r = \frac{1}{2} h.$

Trapéz





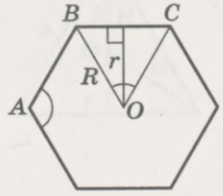
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi;$

$a + b = c + d;$

$h = 2r.$

Szabályos sokszög



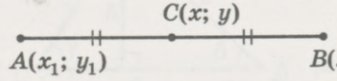
Szögek összege: $180(n-2)$; $P = na;$

$A\angle = \frac{180(n-2)}{n};$ $\quad S = \frac{1}{2} arn;$

$BOC\angle = \frac{360°}{n};$ $\quad S = \frac{1}{2} R^2 n \sin\frac{360°}{n};$

$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n};$ $\quad a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}.$

Koordináták a síkon



$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$ $\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – az $O(a; b)$ középpontú R sugarú körvonal egyenlete.

Térbeli koordináták

Adott két $A(x_1; y_1; z_1)$ és $B(x_2; y_2; z_2)$ pont.

$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ – C az AB szakasz felezőpontjának koordinátája.

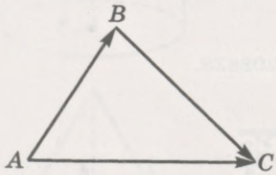
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – az AB szakasz hossza.

$ax + by + cz + d = 0$ – a sík általános egyenlete.

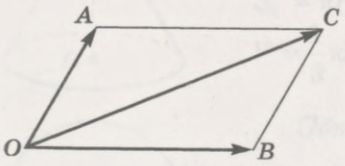
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ – az $M(x_0; y_0; z_0)$ pontra illeszkedő és az $\vec{n} = (a; b; c)$ vektorra merőleges sík egyenlete.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ – az R sugarú $(a; b; c)$ középpontú gömbfelület egyenlete.

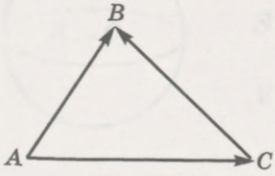
Vektorok



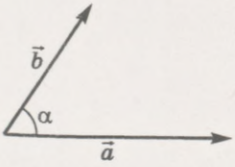
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ – vektorok összeadása háromszögszabály szerint.



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ – vektorok összeadása paralelogrammaszabály szerint.



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ – vektorok különbsége.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$ – az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor skaláris szorzata.

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor merőlegességének feltétele.

$\vec{a} = \lambda \vec{b}$ – az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor kollinearitásának feltétele.

Koordinátákkal megadott vektorok

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái, ha $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Legyen $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Akkor

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$;

$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ – az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor kollinearitásának feltétele.

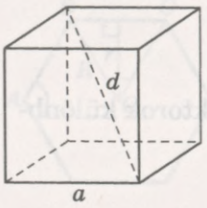
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ – az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor merőlegességének feltétele.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – az $\vec{a} = (x; y; z)$ vektor hossza.

$$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Soklapok

Kocka



$d = a\sqrt{3}$;

$S_{\text{ö}} = 6a^2$;

$V = a^3$.

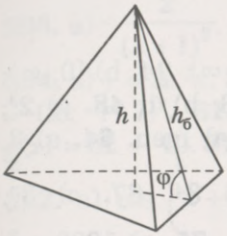
Egyenes hasáb



$S_{\text{ö}} = S_{\text{f}} + 2S_{\text{o}}$;

$S_{\text{f}} = P_{\text{o}} \cdot h$;

$V = S_{\text{o}} \cdot h$.



Gúla

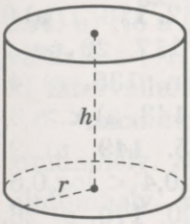
$S_t = S_p + S_o;$

$V = \frac{1}{3} S_o \cdot h.$

Ha a gúla szabályos, akkor $S_p = \frac{1}{2} P_o \cdot h_b$, ahol h_b a gúla alkotója.

$S_p = \frac{S_o}{\cos\varphi}.$

Forgástestek

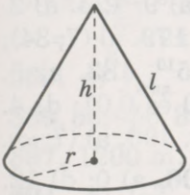


Henger

$S_p = 2\pi rh;$

$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2;$

$V = \pi r^2 h.$

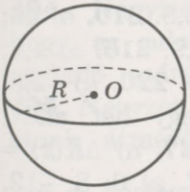


Kúp

$S_p = \pi rl;$

$S_t = \pi rl + \pi r^2;$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$



Gömb és gömbfelület

$S = 4\pi R^2;$

$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$

11. b) 5215 hrn. **15.** a) $x \geqslant 0$; d) R. **23.** d) $[2; \infty)$. **24.** b) $[0; \infty)$; c) R. **27.** b) $a^2 + 4a + 3$. **33.** 10 perc. **35.** a) 3; b) 1. **48.** a) 2^3; d) 2^{-2}. **50.** a) 4. **53.** a) $x - 1$. **62.** a) Nem. **63.** a) Igen. **64.** a) 3. **65.** b) maximuma 3, minimuma $\frac{1}{27}$. **66.** a) $3^{\frac{3}{4}}$. **67.** c) $3^{\frac{5}{3}}$. **68.** c) 0,5. **69.** a) 2. **73.** a) $x = 4$; $x > 4$; $x \leqslant 4$. **75.** a) 1000 m^2. **76.** a) 24 A. **77.** a) 2,6 g. **86.** a) 2; c) 0. **87.** b) 1,5. **88.** a) –2. **89.** a) 2. **90.** a) $x = 3$; $x \geqslant 3$. **91.** c) $x = 4$; $x > 4$. **92.** b) $x \leqslant -0{,}5$. **95.** a) $x \geqslant 2$; c) nincs megoldás. **96.** a) 3. **97.** a) 0. **98.** a) 1. **100.** a) 0 és 1. **102.** a) $x > 2$. **104.** a) $x > 2$. **106.** a) 2,5. **107.** a) 0,75. **108.** a) 3. **109.** b) 1. **110.** a) –1. **111.** a) 2. **113.** 1) a) 0 és 1; 2) a) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. **115.** a) $(-\infty; 0)$. **117.** 20 perc. **130.** 1; 2; 3; 1; 3. **133.** a) $3^4 = 81$. **134.** a) Igen. **135.** a) 4. **136.** a) 2. **140.** a) Nem. **141.** a) 2. **142.** a) $(0; \infty)$. **143.** a) $x > 3$. **144.** a) –3. **146.** a) 81. **147.** a) 9. **148.** a) 35. **149.** a) 9. **152.** a) $\log_{0,5}5 < 0$. **153.** a) $\log_{49}3 < 1$. **154.** a) $\log_2 0{,}4 < \log_2 0{,}6$. **155.** a) $\log_2 0{,}4 < \log_{0,2} 0{,}4$. **168.** a) 19. **169.** a) 5000. **170.** a) 26. **171.** a) –3; b) 1 és –2. **172.** a) – 4; b) –1 és 4. **173.** a) 9. **174.** a) 2. **175.** a) 7. **176.** a) 6. **177.** a) $(-5; 1{,}5)$. **178.** a) $(-4; 4)$. **179.** a) $(7; 34)$; c) $(7; 16)$. **180.** a) $x > -2$. **181.** a) 169. **182.** b) 5^{10}. **183.** a) 5. **184.** a) 100; c) 4 és 8; d) 100 és 0,01. **185.** c) 1000 és 0,01; d) 4. **186.** a) 9 és 1,25. **187.** a) 9. **188.** a) – 1. **189.** a) $(6; \infty)$. **190.** a) $(7; \infty)$. **191.** a) (5,5; 7]. **192.** a) $(1; 3\frac{2}{3})$. **193.** b) $(\frac{1}{3}; 27)$. **206.** a) 0; d) 12. **207.** a) –3; b) 3. **208.** a) 22; c) –7. **209.** a) 90; c) 10,5. **210.** a) 45; c) 0. **211.** a) 2. **212.** a) –0,2. **213.** a) 0,3. **214.** a) 0,9. **215.** a) 1,2; 0,1. **216.** a) 0,2; 2. **217.** a) 0. **218.** a) 1. **219.** a) 0. **220.** a) –1,5. **221.** a) –8. **222.** a) $2x$. **224.** a) $\approx$ 50 egér egy hét alatt; b) $\approx$ 30 egér egy hét alatt. **225.** a) $\approx$ 11 km/h. **227.** a) $\Delta K(x) =$ $= 600$ hrn.; b) $\Delta R(x) = 1552$ hrn. **245.** a) –4. **247.** a) 0; 8; –12. **248.** a) 3. **249.** a) 5. **250.** a) $y = 3x - 2$. **253.** a) 0,5. **254.** a) –1. **257.** a) $y = -6x - 12$. **267.** c) $2x^5$; d) –1. **268.** a) $2x$; c) $4x^3 + 18x$. **269.** a) $6x^2$; c) $\frac{2}{3}x$. **271.** –3; –5; –9. **272.** –94; 2; $24\sqrt{2} + 2$. **274.** a) $2\cos x$. **275.** a) $2x - \sin x$. **276.** b) 8. **277.** a) –1. **278.** a) $7e^x$. **279.** e) $\frac{2}{x \ln 10}$. **280.** a) $2{,}5x^{1,5}$. **281.** a) $5x^4 - 10x$; c) $2x + 1$. **283.** a) $7x^6 - 6x^2$; b) $5x^4$; c) $3x^2 - 2x - 7$; d) $3x^2 - 6x + 2$. **286.** $y = 4x - 9$. **287.** $y = 1$. **288.** $y = -94x - 144$. **289.** a) $3x^2\cos x -$ $- x^3 \sin x$. **291.** a) $\cos x - \sin x - x\cos x$. **294.** a) 1. **297.** a) $2e^x(x + 1)$.

298. a) $-\frac{2}{(x+1)^2}$. **300.** a) $2e$. **301.** a) $2e$. **302.** a) 1. **303.** b) $y = x + 1$. **304.** a) $y = 2e^{-1}x$. **305.** b) 0. **307.** a) $y = -x + \pi - 1$. **314.** a) $f(g(x)) = (2x + 7)^2$. **315.** c) $f(g(x)) = \sin(3x + 4)$. **316.** a) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x + 10$. **318.** a) $20(x + 3)^{19}$. **320.** a) $4\cos 4x$. **321.** a) $3\cos 3x$. **322.** a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. **323.** b) $e^{\sin x} \cdot \cos x$. **325.** a) $\sin 2x + 2x\cos 2x$. **326.** a) $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$; c) $\frac{2x + 1}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$. **327.** a) $4\sin^3 x \cos x$. **328.** a) $\sqrt{3}$. **329.** a) 2. **330.** b) 40. **333.** a) $y = -3x + 0{,}75\pi$. **334.** a) $-2\sin 2x$. **336.** a) $\frac{9}{3x - 4}$. **346.** a) 0 és 1. **347.** b) 0,5. **348.** a) 0. **354.** a) Nő a $(-\infty; 0]$, csökken a $[0; \infty)$ intervallumon. **355.** a) Növekszik a $[-1; 0]$ és $[1; \infty)$ intervallumon. **356.** a) Csökken a $[-1; 3]$ intervallumon. **357.** a) $x = -0{,}5$ – minimumhely. **358.** a) $x = 0$ – maximumhely. **359.** a) $x = 0$ – minimumhely, $x = -1$ – maximumhely. **360.** a) $x = \frac{1}{7}$ – minimumhely. **361.** a) $x = 1$ – minimumhely, $x = -1$ – maximumhely. **362.** a) A függvénynek nincs extrémuma. **367.** a) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ – minimumhelyek, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ – maximumhelyek (minden $n \in Z$ esetén). **369.** a) $y_{max.} = y(0) = 2$. **374.** a) $y_{min.} = y(0) = 0$. **388.** 21; –4. **389.** 56; –56. **390.** a) 6; –19. **391.** –0,5. **392.** 1024. **396.** 200×200 (m). **397.** 1200 m. **399.** a) 1) $\sqrt{20}$, 0; b) 1) 5; 2. **400.** a) Nem; b) nem. **401.** a) $[-2; \infty)$. **402.** b) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **403.** $XM = \sqrt{3}$. **404.** Négyzet. A második módszer mértani. Bizonyítsd be, hogy az adott körbe írt derékszögű háromszögek közül az egyenlő szárú derékszögű háromszög területe a legnagyobb! **405.** Négyzet. **406.** 4 m, 4 m és 2 m. **407.** Ha a henger alaplapjának átmérőjét x-szel jelöljük, magasságát pedig y-nal, akkor a térfogata $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot y = 1$, innen $y = \frac{4}{\pi x^2}$. Ekkor a felszín $S = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)y$. Ez a kifejezés legkisebb értékét akkor veszi fel, ha $x = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$. Ebben az esetben $r = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$; $h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$. **416.** a) 10 m/s. **417.** a) $v(t) = 8t + 3$; b) $a(t) = 8$; c) $v(5) = 43$ m/s; $a(5) = 8$ m/s^2. **418.** a) $v(t) = (6t + 4)$ rad/s. **419.** a) 16 m/s; 42 m/s^2. **420.** $6\frac{2}{3}$ s múlva. **421.** 4 rad/s.

422. $\frac{13}{12}$ g/h. **424.** $t = 1$ s. **428.** 1A. **429.** $t = 9$ s. **430.** a) 4 m/s és 2 m/s. **431.** a) 36 m/s^2. **433.** a) 20 m/s; b) 4 s; c) 80 m. **443.** $(x^4)' = 4x^3$; igen. **448.** a) $3x + C$; c) $x^3 + C$. **449.** a) $C - x^5$. **450.** a) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$. **454.** a) $5x + x^3 + C$. **455.** a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$. **462.** a) $x + 0{,}1x^{10} + C$. **463.** a) $-2\cos x + C$. **464.** b) $-e^{-x} + C$. **465.** a) $15x^4$. **466.** b) $0{,}5x^2 + \operatorname{tg} x - 3$. **467.** c) $-\cos x + 1{,}5$. **468.** a) $v(t) = 4t^2 + 20$. **469.** a) $s(t) = t^3 + 4$. **471.** a) Igen. **472.** c) $0{,}4e^{5x-1}$. **475.** a) $-0{,}1\sin 10x$. **477.** b) $x + 0{,}5\sin 2x$. **488.** a) 4 n. e. **489.** a) $6\frac{2}{3}$ n. e. **490.** a) 27 n. e. **493.** a) $8\frac{2}{3}$ n. e. **494.** a) 1 n. e. **495.** a) 6 n. e. **496.** a) $\pi + 4$ n. e. **497.** a) 6,4. **498.** Egyik megoldás: a trapéz területének képlete alapján: alapjai 4 e. és 6 e. hosszúak, magassága 4 e. **499.** a) 0,25. **503.** $10\frac{2}{3}$ n. e. **504.** a) 36. **505.** a) $\frac{3}{8}$. **506.** a) 4,5 n. e. **507.** a) $10\frac{2}{3}$. **513.** a) 0,5. **516.** b, c, a. **517.** a) 1. **518.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **519.** a) $\frac{2}{3}$. **520.** a) $e - 1$. **521.** b) 1 n. e. **522.** a) $3\frac{3}{4}$ n. e. **523.** c) $(12 + \ln 81)$ n. e. **524.** b) 1,75. **525.** c) 2. **526.** b) 8. **527.** a) π. **529.** a) $\frac{4}{3}$ n. e. **531.** a) $\left(\frac{3}{\ln 2} - 2\right)$ n. e. **532.** Igen. **536.** 6 n. e. **537.** 12 n. e. **541.** 117π k. e. **542.** $0{,}2\pi$ k. e. **545.** 198 m. **546.** 80 m. **547.** 10 m. **548.** 4,5. **549.** $2\frac{2}{3}$. **550.** 12 π. **551.** 24 π. **552.** 0,125 J. **553.** 0,784 J. **554.** ≈ 1177 m. **556.** 9,5 m. **557.** 48 C. **578.** a) $\{-2; 0; 2\}$. **579.** a) $(-\infty; 4)$. **582.** a) $[0; 49]$. **583.** $K \cap P = \{a; c; 2\}$, $K \setminus P = \{b\}$. **590.** A (4; –1) számpár. **591.** $A \cap B$ – 6 többszöröseinek halmaza. **592.** $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = N$, $A \setminus B = A$. **605.** a) 3 628 800; b) 6 227 020 800. **606.** a) $(n + 1)!$; b) $n!$; c) $n + 1$; d) $(n - 1)!$. **608.** 24. **611.** 120. **612.** 6; 24. **613.** 20 160. **615.** a) 30 240; b) 1716. **618.** a) 8; b) 10. **622.** 24. **624.** 240. **625.** 3600. **626.** 24. **636.** xy, xz, xt, yz, yt, zt. **639.** a) 120; d) 5040. **641.** 720. **642.** 2520. **643.** 6. **644.** 18. **646.** 30 240. **647.** a) 60. **651.** 190. **652.** 496. **653.** 28. **654.** $0{,}5n(n - 1)$. **655.** 35; $0{,}5n(n - 3)$. **657.** 648. **658.** 60. **659.** 20. **660.** 60. **662.** a) 7. **664.** a) 10. **666.** $C_{28}^7 \cdot C_{27}^7 \cdot C_{14}^7$. **667.** C_{49}^6. **674.** A módusz 32, a medián 31,5.

675. A terjedelem 3, a medián 2, a módusz pedig 1. **676.** b) 3-szor. **678.** Terjedelem 4, módusz 3, medián 3. **681.** 50,5. **682.** $4\frac{1}{3}$; 5 és 4,5. **684.** 528 g. **687.** Igen. **688.** 2,7%. **689.** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$; $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$. **690.** Számtani közepek $\sqrt{0{,}116}$; $\sqrt{0{,}142}$; $\sqrt{0{,}134}$. A legjobb munkát az első esztergályos végezte. **724.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$. **725.** a) $\frac{1}{14}$; c) $\frac{1}{28}$. **728.** a) 0; b) 0; c) 1. **730.** $\frac{54}{125}$; $\frac{36}{125}$; $\frac{8}{125}$. **731.** a) 0,3; b) 0,2. **733.** a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{7}{12}$. **734.** $\frac{1}{24}$. **735.** $\frac{1}{1296}$. **736.** $\frac{1}{24}$. **737.** $\frac{1}{2520}$. **738.** a) $\frac{1}{60}$; b) $\frac{1}{10}$. **740.** $\frac{5}{9}$. **741.** a) $\frac{60}{253}$; b) $\frac{15}{253}$. **742.** a) $\frac{1}{330}$; b) $\frac{33}{236}$. **743.** a) $\frac{33}{59}$; b) $\frac{45}{118}$. **746.** a) $\frac{5}{9}$. **748.** a) 3 szám a 49-ből; b) egyenlő a valószínűségük, mivel $C_{15}^{7} = C_{15}^{8}$. **758.** $M(\varsigma) = 4{,}5$. **759.** Az utólsó cellába $\frac{1}{4}$-et kell írni; $M(\varsigma) = 3\frac{5}{6}$. **760.** $M(\varsigma) = 350$ hrn. **761.** $M(\varphi) = 2{,}5$; $D(\varphi) \approx 2{,}92$. Ilyen valószínűségi mennyiséget kapunk, ha szabályos dobókocka dobásait figyeljük. **764.** $D(y) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E(y) = \{1; 6; 15; 20\}$. **774.** $M(2; -2; 5)$. **779.** a) $(0; 1; 8)$. **780.** a) Igen. **783.** $B(-4; 7; 24)$. **784.** $A(8; 18; -8)$. **785.** a) Igen. **786.** a) $D(-5; 9; 2)$. **787.** $C(3; -8; 6)$. **788.** $3\sqrt{6}$. **790.** Nem. **791.** $3\sqrt{38}$. **792.** -4. **793.** $M(0; -2; 0)$. **794.** $3\sqrt{2}$. **796.** a) $P = 15\sqrt{2}$; $S = 12{,}5\sqrt{3}$. **811.** $\overrightarrow{AB} = (2; 5; 3)$, $\overrightarrow{BA} = (-2; -5; -3)$. **814.** a) $\sqrt{14}$; b) $\sqrt{41}$. **815.** 3 vagy -3. **816.** $\vec{a} = (3; 6; -3)$ vagy $\vec{a} = (-3; -6; 3)$. **819.** a) $\overrightarrow{CP}$; b) $\overrightarrow{AT}$; c) $\overrightarrow{AE}$; d) $\vec{O}$. **820.** a) $3\vec{a} = (9; -12; 6)$. **822.** $|3\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{123}$. **824.** a) $m = -5$. **825.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2; -1; -6)$. **834.** a) -6. **835.** b) 130°. **837.** b) -18. **839.** a) 0. **843.** a) $x = -9$. **844.** $D(0; 0; 1)$. **845.** $\cos x = \frac{4}{9}$. **852.** $5x - 3z + 2 = 0$. **853.** $ax + by + cz = 0$. **854.** a) $3x - 4y + 7z + 26 = 0$. **856.** $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 18$. **871.** Igen. **872.** $4\sqrt{3}$ cm^2. **874.** a) a; b) $a\sqrt{2}$. **876.** 18 m^2. **878.** $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$. **885.** $5(2\sqrt{3} + 1)$. **898.** 4 cm. **899.** c) $4ab$. **900.** $2{,}25\sqrt{3}$ cm. **903.** a) 1464 cm^2. **904.** $6a^2 \sin\alpha$. **905.** 13 cm.

906. 192 cm². **907.** 5 cm, 10 cm és 15 cm. **908.** ≈ 285 mm. **909.** 6 cm, 7 cm és 12 cm. **912.** 4 cm. **914.** Nem. **916.** $2\sqrt{2}S$. **919.** 45°. **920.** a) $2a(a + 2h)$. **921.** $l\sin\alpha$. **922.** a) $d^2\sin\varphi\cos\varphi$. **926.** $5\sqrt{13}$ cm. Figyeld meg a hasáb hálóját. **932.** $2n$ éle $n + 1$ lapja van. **933.** Nem. **938.** 5 cm. **939.** 100 cm². **940.** a. **941.** a) $b\sin\alpha$; b) $2b\cos\alpha$. **942.** b) $3l\cos\alpha$; d) $3\sqrt{3}l^2(\cos\alpha + \cos^2\alpha)$. **943.** ≈ 42°. **944.** 24 cm. **945.** 125. **946.** a) $128\sqrt{3}$. **947.** a) $\frac{a^2}{\cos\alpha} + a^2$. **949.** $5\sqrt{3}$ cm. **950.** $\frac{25\sqrt{2}}{8}$ cm. **953.** 30°. **954.** $0{,}25Q$. **955.** 16 cm². **959.** $2(3 + \sqrt{3})$. **960.** 36 dm²; ≈ 35 dm². **961.** a^2. **974.** $2 : \sqrt{2}$. **975.** a) Igen. **976.** a) Nem; b) igen; c) nem. **978.** a) 864 cm². **979.** b) 0,5 m. **980.** b) 4-szer. **984.** $2\sqrt{3}a^2$. **985.** $b\sqrt{2}$. **987.** 16 cm²; $8\sqrt{2}$ cm². **991.** 9-szer. **992.** Lehetséges. **995.** $\arccos\frac{1}{3}$; 90°. **1005.** Egy; végtelen. Igen. **1006.** Végtelen. Igen. **1008.** 4 cm². **1009.** 40π cm². **1011.** $H : r = 2 : 1$. **1012.** a) 24 m; d) 290π. **1013.** b) 3 cm. **1016.** πS. **1018.** $2\pi r^2\text{tg}\alpha$. **1019.** $\frac{\pi}{2}d^2\left(1 + \text{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **1020.** $2 : \sqrt{3}$. **1023.** rh. **1024.** $\sqrt{\frac{10}{\pi}}; \frac{15}{\sqrt{10\pi}}$. **1025.** $Q : 4\pi$. **1029.** ≈ 3,3 m². **1030.** Nem. **1038.** Kúp. **1039.** 10 m. **1040.** 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm. **1041.** 90°. **1042.** 24π cm². **1045.** a) $l\sin\alpha$; c) $l^2\sin\alpha\cos\alpha$. **1046.** $\sqrt{2}\pi R^2$. **1047.** $8\sqrt{3}\pi$ cm². **1050.** 90π cm². **1052.** $\sqrt{3}$ cm. **1054.** Nem, ha a kúp magassága kisebb, mint az alaplap sugara. **1056.** a) $0{,}5R$. **1057.** π cm². **1058.** $0{,}5h\sqrt{2}$. **1059.** 60°. **1060.** b) 24π cm². **1061.** b) $\sqrt{2}\pi a^2$. **1070.** $0{,}75\pi r^2$. **1071.** 64π cm². **1072.** 30 cm. **1073.** $R + r$ vagy $|R - r|$. **1074.** a) Két, az adott síkkal párhuzamos, tőle r távolságra lévő sik; b) egy r sugarú adott középponti körvonal. **1077.** ≈ 0,5 dm. **1078.** 20 g. **1079.** 200π cm². **1085.** a) 20 cm. **1087.** 1 dm. **1088.** $\pi r^2\cos^2\alpha$. **1089.** 10 cm és 24 cm. **1090.** 10 cm vagy 70 cm. **1091.** 24 cm. **1097.** Ezek a távolságok egyenlők. **1119.** $3\pi\sqrt{3}$ cm. **1123.** a) $Q : \pi r$. **1124.** $r^2\text{tg}\alpha\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; ≈ 22 m². **1125.** a) $\frac{a}{\sqrt{6}}$; b) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **1126.** d) $\frac{a}{2}\text{ctg}\frac{180°}{m}\text{tg}\frac{\alpha}{2}$. **1127.** $2r\sin^2\alpha$. **1138.** $Q\sqrt{Q}$. **1139.** $\frac{\sqrt{3}}{9}d^3$. **1140.** $6\sqrt[3]{V^2}$. **1145.** 9 cm. **1146.** 30 dm.

1157. $\frac{\sqrt{3}}{4}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **1162.** $4ar^2$. **1166.** $\approx$ 3,8 dm^3. **1167.** $\approx$ 5,4 ezer m^2. **1179.** $\frac{1}{6}d^2h$. **1180.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ dm^3. **1182.** Az egyik oldallapja lesz a gúla alaplapja. **1183.** $\frac{1}{6}abc$. **1184.** a) $\frac{1}{3}b^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. **1189.** 6 cm. **1191.** 8-szor. **1196.** $10\frac{2}{3}\pi$ cm^3. **1198.** $\frac{\pi}{6}a^3$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **1199.** 8 : 27. **1201.** 8-szor. **1202.** Igen. **1204.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **1205.** $\frac{1}{3}abh\sin\varphi$. **1206.** 112 cm^3. **1212.** $\approx$ 5,7 cm. **1213.** $\approx$ 42 cm. **1218.** $\approx$ 8,4 cm. **1219.** Kevesebb, mint 4,18 t. **1220.** 0,0004 mm. **1221.** a) $3x$. **1222.** a) 56; 42. **1223.** a) $4^3 < 3^4$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 < \left(\frac{4}{9}\right)^2$. **1226.** Kevesebb, mint $1\frac{33}{50}$. **1227.** $d = 2$, $a_{20} = 41$, $S_{20} = 440$. **1228.** $q = 2$, $b_{10} = 1536$, $S_{10} = 3069$. **1229.** 4905. **1230.** a) 42. **1231.** 58. **1232.** 21. **1233.** A második rész helyes, mivel 1 se nem páros, se nem páratlan. **1237.** a) Páros; b) páros. **1239.** $y = 3x$. **1240.** $y = 0{,}5x$. **1242.** (3; 2). **1243.** Igen, mert minden $x \in (0; 180°)$ valós szám, ahol x a háromszög egyik szöge. **1244.** $x = -7$, $y = 0$. **1245.** a) 5; b) 0. **1246.** $y = 0$. **1251.** a) $\sin 1° < \sin 3°$; b) $\sin 1 > \sin 3$. **1252.** a) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{3\pi}{2}$. **1253.** cos2, tg2, cos3. **1255.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1256.** $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **1257.** a) $\frac{\pi}{6}$. **1258.** a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **1259.** a) 0; c) $\cos^2\alpha$. **1263.** a) 0,8; b) $\frac{3}{4}$. **1271.** $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; 1. **1273.** -27. **1274.** a) $a^{-2} - 9$. **1275.** 4; 27; 4; 1; $\frac{1}{3}$. **1277.** $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[10]{p^2}$. **1278.** $x^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{3}}$, $(xz)^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{5}}$. **1279.** a) 2; b) 10. **1280.** $x - c^2$. **1281.** a) 11. **1284.** Nem. **1286.** Igen; igen. **1287.** $k = 2$. **1288.** Igen. **1289.** b)–d) Igen. **1290.** a) Csökkenő; b) növekvő. **1293.** a) $x = 5$. **1296.** a) Három; b) négy. **1298.** a) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$. **1299.** $\sqrt{2}$. **1300.** $\sqrt{42}$. **1301.** (1; 5; 3). **1303.** (−1; −2; −1); (1; 2; 1). **1304.** (−3; 1; 7); (3; 1; −3). **1306.** a) 4; b) (−2; −2; 2; −2); (2; 2; 2; 2). **1307.** a) 0,5; b) −3; c) $\frac{1}{2}$. **1309.** −2. **1310.** Igen.

1311. a) 1,5; c) 1. **1312.** -4; 0; 6. **1313.** 1; -1; -1. **1314.** a) $6x^2$; b) $5x^4 - 6x$. **1315.** a) -1; 1. **1316.** a) $x \in (1; +\infty)$ – növekvő, $x \in (-\infty; 1)$ – csökkenő. **1317.** a) $x_{max} = \frac{1}{2}$. **1318.** Igen. **1321.** a) $\max\limits_{[-5; 0]} f(x) = f(-5) = 55$, $\min\limits_{[-5; 0]} f(x) = f(3) = -9$. **1322.** $-\frac{1}{2}$. **1323.** $5\sqrt{2}$. **1324.** Egy 1 m élhosszúságú kocka. **1326.** $y = \frac{x^3}{3} + 8\frac{2}{3}$. **1327.** a) $\frac{x^4}{4} + 2x + C$. **1328.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + 3\frac{2}{3}$. **1329.** a) $2\frac{2}{3}$ n. e. **1330.** a) 9; b) 0. **1331.** 36 n. e. **1332.** $1\frac{1}{3}$ n. e. **1335.** 300 cm^2. **1336.** $4\sqrt{3}$ dm^2. **1339.** $\sqrt{3}$ cm^2. **1340.** 216π cm^2. **1341.** $4\pi a^2$. **1342.** Igen. **1343.** 17,5 cm, 17,5 cm. **1344.** Nem. **1345.** a) Felére; b) 1:4. **1346.** 40π cm. **1347.** Nem. **1348.** 1 : 4. **1349.** a) $m^2 : n^2$; b) $m^3 : n^3$. **1350.** $40\sqrt{5}$ cm^3. **1351.** $54\sqrt{3}$ dm^3. **1352.** 144π dm^3. **1353.** b) 4 : 9. **1354.** a) π m^2. **1355.** 4-szer kevesebben; 8-szor kevesebben. **1356.** $8\pi\sqrt{2}$ dm^2, $\frac{16}{3}\pi$ dm^3. **1357.** Vizsgálj 10 esetet! **1358.** d) A *3* szám osztható 5-tel is és 9-cel is. Ezért az utolsó számjegy vagy 5 vagy 0 és a számjegyek összege osztható 9-cel. **1359.** a) KUT = 289; b) nincs megoldás. **1360.** 59 perc múlva. **1361.** Több mint 2^{33}, ami több 8 milliárdnál. Ekkora embertömeg nem létezett. **1362.** $\approx$ 232 év. Az $1{,}01^x = 10$ egyenletet oldd meg számológéppel, próbálgatással. **1363.** 1480. **1364.** Az ilyen számok $3n + 1$ alakúak, ahol n természetes szám. A $(3n + 1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1$ szám 9-cel osztása során a maradék 1. **1366.** A henger magassága egyenlő a sugarával. **1367.** Naponta 1-et. **1368.** Nem létezik.

TARTALOM

Előszó 3

ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI

1. fejezet. **Exponenciális és logaritmusfüggvény** 5

1. §. A függvények és főbb tulajdonságaik 6
2. §. Hatvány és az exponenciális függvény 14
3. §. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek 23
4. §. A logaritmus fogalma és a logaritmusfüggvény 30
5. §. Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek 37
1. számú önálló munka 44
Matematikatörténeti adalékok 45
Az 1. fejezet összefoglalása 46

2. fejezet. **A derivált és alkalmazásai** 49

6. §. A függvény határértéke 50
7. §. A függvény érintője. A derivált 58
8. §. Deriválás, differenciálás 65
9. §. Az összetett függvény deriváltja 72
2. számú önálló munka 77
10. §. A derivált alkalmazása függvényvizsgálatkor 78
11. §. A függvény legkisebb és legnagyobb értéke 86
12. §. A derivált mint változási sebesség 91
3. számú önálló munka 97
Matematikatörténeti adalékok 97
A 2. fejezet összefoglalása 98

3. fejezet. **Az integrál és alkalmazása** 100

13. §. Primitív függvény 101
14. §. A grafikon alatti síkrész területe 107
15. §. Az integrál 112
16. §. Az integrál alkalmazása 121
4. számú önálló munka 127
Matematikatörténeti adalékok 127
A 3. fejezet összefoglalása 130

4. fejezet. **A valószínűség-számítás és a matematikai statisztika alapjai** 132

17. §. Halmaz, részhalmaz 133
18. §. Kombinatorika és a szorzásszabály 138
19. §. Variáció, permutáció és kombináció 144
20. §. A statisztika alapjai 149
21.§. A minta grafikus megadása 155

22. §. Véletlen események és azok valószínűsége 165
23. §. Az esemény relatív gyakorisága és véletlen mennyiségek 175
5. számú önálló munka 181
Matematikatörténeti adalékok 182
A 4. fejezet összefoglalása 185

MÉRTAN

5. fejezet. **Koordináták és vektorok a térben** 188
24. §. Térbeli koordináták 189
25. §. Térbeli vektorok 194
26. §. Térbeli vektorok alkalmazása 200
6. számú önálló munka 206
Matematikatörténeti adalékok 207
Az 5. fejezet összefoglalása 208

6. fejezet. **Mértani testek. A mértani testek térfogata és felszíne** 210
27. §. Mértani testek és soklapok (poliéderek) 211
28. §. Hasábok 217
29.§. Gúla 224
30. §. Szabályos poliéderek (soklapok) 230
7. számú önálló munka 236
31.§. Forgástestek 237
32. §. Kúp 244
33. §. Gömb és gömbfelület 251
8. számú önálló munka 257
34. §. Testek kombinációja 257
35. §. A hasáb és a henger térfogata 262
36. §. A gúla, a kúp és a gömb térfogata 268
9. számú önálló munka 276
Matematikatörténeti adalékok 276
A 6. fejezet összefoglalása 278

KIEGÉSZÍTŐ FELADATOK

Számok és függvények 281
Az egyenes és a sík a térben 286
Derivált és integrál 287
Mértani testek 289
Nehezebb feladatok 290
Alkotói feladatok témakörei 293
Ajánlott irodalom 294
Tárgymutató 295
Kiegészítő tananyag 298
Feleletek 310

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

МАТЕМАТИКА

Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів із навчанням угорською мовою

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Переклад з української

Перекладач *Юдіт Імріївна Кулін*

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Обкладинка, макет, ілюстрації *В. Марущинця*
Коректор *І. О. Петро*

Формат 60x90/16. Папір офс. Гарнітура Таймс. Друк офс.
Умовн. друк. арк. 20,0. Обл.-вид. арк. 19,25.
Тираж 1100 пр. Зам. № 210-11.

Державне підприємство
«Всеукраїнське спеціалізоване видавництво «Світ»
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2980 від 19.09.2007
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк на ПРАТ "Львівська книжкова фабрика "Атлас"
79005 м. Львів, вул. Зелена, 20
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК 1110 від 08.11.2002 р.